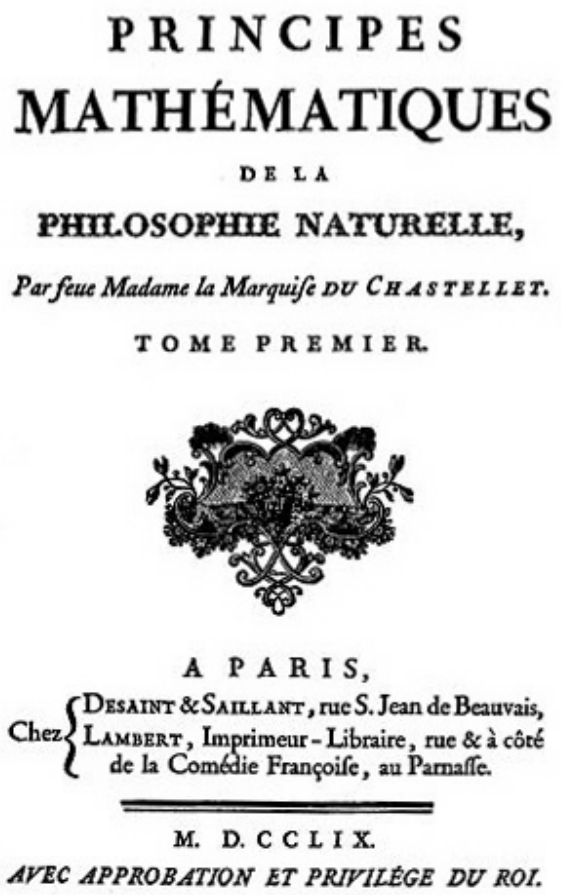
Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle

Isaac Newton

traduit en français moderne d'après l'øeuvre de la marquise Du Châtelet,
(fac-similé de l'édition de 1759 publiée aux Éditions Jacques Gabay, 1990)

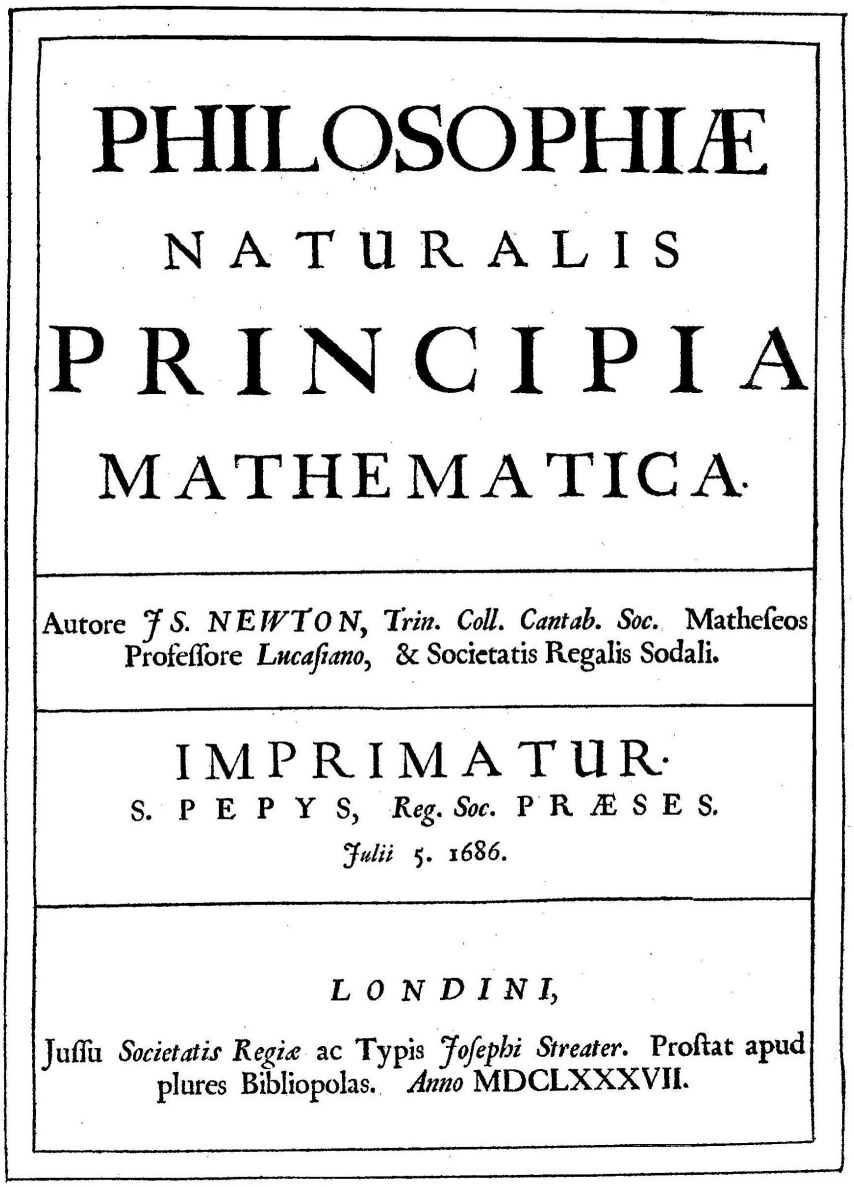


PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,
Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.
TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.

M. D. CCLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

Page de titre de l'édition en françois de 1759
par la Marquise du Châtelet



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Page de titre de l'édition originale en latin de 1687

Extraits

DÉFINITIONS

DÉFINITION PREMIÈRE

La quantité de matière se mesure par la densité et le volume pris ensemble.

L'air devenant d'une densité double est quadruple en quantité lorsque l'espace est double et sextuple si l'espace est triple. On en peut dire autant de la neige et de la poudre condensées par la liquéfaction ou la compression, aussi bien que dans tous les corps condensés par quelque cause que ce puisse être. Je ne fais point attention ici au milieu qui passe librement entre les parties des corps, supposé qu'un tel milieu existe. Je désigne la quantité de matière par les mots de corps ou de masse. Cette quantité se connaît par le poids des corps, car j'ai trouvé par des expériences très exactes sur les pendules, que les poids des corps sont proportionnels à leur masse ; je rapporterai ces expériences dans la suite.

DÉFINITION II

La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse.

Le mouvement total est la somme du mouvement de chacune des parties ; ainsi la quantité du mouvement est double dans un corps dont la masse est double si la vitesse reste la même, mais si on double la vitesse, la quantité du mouvement sera quadruple.

DÉFINITION III

La force qui réside dans la matière (*vis insita*) est le pouvoir qu'elle a de résister. C'est par cette force que tout corps persévère de lui-même dans son état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.

Cette force est toujours proportionnelle à la quantité de matière des corps et elle ne diffère de ce qu'on appelle l'inertie de la matière que par la manière de la concevoir, car l'inertie est ce qui fait qu'on ne peut changer sans effort l'état actuel d'un corps, soit qu'il se meuve, soit qu'il soit en repos ; ainsi on peut donner à la force qui réside dans les corps le nom très expressif de force d'inertie.
Le corps exerce cette force toutes les fois qu'il s'agit de changer son état actuel et on peut la considérer alors sous deux différents aspects, ou comme résistante, ou comme impulsive : comme résistante, en tant que le corps s'oppose à la force qui tend à lui faire changer d'état ; comme impulsive, en tant que le même corps fait effort pour changer l'état de l'obstacle qui lui résiste.
On attribue communément la résistance aux corps en repos et la force impulsive à ceux qui se meuvent ; mais le mouvement et le repos, tels qu'on les conçoit communément ne sont que respectifs, car les corps qu'on croit en repos ne sont pas toujours dans un repos absolu.

DÉFINITION IV

La force imprimée (*vis impressa*) est l'action par laquelle l'état du corps est changé, soit que cet état soit le repos, ou le mouvement uniforme en ligne droite.

Cette force consiste uniquement dans l'action et elle ne subsiste plus dans le corps dès que l'action vient à cesser. Mais le corps persévère par sa seule force d'inertie dans le nouvel état dans lequel il se trouve. La force imprimée peut avoir diverses origines, elle peut être produite par le choc, par la pression et par la force centripète.

DÉFINITION V

La force centripète est celle qui fait tendre les corps vers quelque point, comme vers un centre, soit qu'ils soient tirés ou poussés vers ce point, ou qu'ils y tendent d'une façon quelconque.

La gravité qui fait tendre tous les corps vers le centre de la terre ; la force magnétique qui fait tendre le fer vers l'aimant et la force, quelle qu'elle soit, qui retire à tout moment les planètes du mouvement rectiligne et qui les fait circuler dans des courbes sont des forces de ce genre.
La pierre qu'on fait tourner par le moyen d'une fronde agit sur la main en tendant la fronde par un effort qui est d'autant plus grand qu'on la fait tourner plus vite et elle s'échappe aussitôt qu'on ne la retient plus. La force exercée par la main pour retenir la pierre, laquelle est égale et contraire à la force par laquelle la pierre tend la fronde, étant donc toujours dirigée vers la main, centre du cercle décrit, est celle que j'appelle force centripète. Il en est de même de tous les corps qui se meuvent en rond, ils font tous effort pour s'éloigner du centre de leur révolution et sans le secours de quelque force qui s'oppose à cet effort et qui les retient dans

leurs orbes, c'est-à-dire, de quelque force centripète, ils s'en iraient en ligne droite d'un mouvement uniforme.
Un projectile ne retomberait point vers la terre s'il n'était point animé par la force de la gravité, mais il s'en irait en ligne droite dans les cieux avec un mouvement uniforme si la résistance de l'air était nulle. C'est donc par sa gravité qu'il est retiré de la ligne droite et qu'il s'infléchit sans cesse vers la terre et il s'infléchit plus ou moins selon sa gravité et la vitesse de son mouvement. Moins la gravité du projectile sera grande par rapport à sa quantité de matière, plus il aura de vitesse, moins il s'éloignera de la ligne droite et plus il ira loin avant de retomber sur la terre.
Ainsi, si un boulet de canon était tiré horizontalement du haut d'une montagne, avec une vitesse capable de lui faire parcourir un espace de deux lieues avant de retomber sur la terre, avec une vitesse double, il n'y retomberait qu'après avoir parcouru à peu près quatre lieues et avec une vitesse décuple il irait dix fois plus loin ; (pourvu qu'on n'ait point d'égard à la résistance de l'air) et en augmentant la vitesse de ce corps on augmenterait à volonté le chemin qu'il parcourrait avant de retomber sur la terre et on diminuerait la courbure de la ligne qu'il décrirait, de sorte qu'il pourrait ne retomber sur la terre qu'à la distance de 10, de 30 ou de 90 degrés, ou qu'enfin il pourrait circuler autour, sans y retomber jamais et même s'en aller en ligne droite à l'infini dans le ciel.
Or, par la même raison qu'un projectile pourrait tourner autour de la terre par la force de la gravité, il se peut que la lune, par la force de sa gravité, (supposé qu'elle gravite) ou par quelle qu'autre force qui la porte vers la terre soit détournée à tout moment de la ligne droite pour s'approcher de la terre et qu'elle soit contrainte à circuler dans une courbe et sans une telle force, la lune ne pourrait être retenue dans son orbite.
Si cette force était moindre qu'il ne convient, elle ne retirerait pas assez la lune de la ligne droite et si elle était plus grande elle l'en retirerait trop et elle la tirerait de son orbe vers la terre. La quantité de cette force doit donc être donnée et c'est aux mathématiciens à trouver la force centripète nécessaire pour faire circuler un corps dans un orbite donné et à déterminer réciproquement la courbe dans laquelle un corps doit circuler par une force centripète donnée, en partant d'un lieu quelconque donné, avec une vitesse donnée.
La quantité de la force centripète peut être considérée comme absolue, accélératrice et motrice.

DÉFINITION VI

La quantité absolue de la force centripète est plus grande ou moindre, selon l'efficacité de la cause qui la propage du centre.

C'est ainsi que la force magnétique est plus grande dans un aimant que dans un autre, suivant la grandeur de la pierre et l'intensité de sa vertu.

DÉFINITION VII

La quantité accélératrice de la force centripète est proportionnelle à la vitesse qu'elle produit dans un temps donné.

La force magnétique du même aimant est plus grande à une moindre distance qu'à une plus grande. La force de la gravité est plus grande dans les plaines et moindre sur le sommet des hautes montagnes et doit être encore moindre (comme on le prouvera dans la suite) à de plus grandes distance de la terre et à des distances égales, elle est la même de tous côtés ; c'est pourquoi elle accélère également tous les corps qui tombent, soit qu'ils soient légers ou pesants, grands ou petits, abstraction faite de la résistance de l'air.

DÉFINITION VIII

La quantité motrice de la force centripète est proportionnelle au mouvement qu'elle produit dans un temps donné.

Le poids des corps est d'autant plus grand qu'ils ont plus de masse et le même corps pèse plus près de la surface de la terre que s'il était transporté dans le ciel. La quantité motrice de la force centripète est la force totale avec laquelle le corps tend vers le centre et proprement son poids et on peut toujours la connaître en connaissant la force contraire et égale qui peut empêcher le corps de descendre.
J'ai appelé ces différentes quantités de la force centripète, motrices, accélératrices et absolues, afin d'être plus court.
On peut, pour les distinguer, les rapporter aux corps qui sont attirés vers un centre, aux lieux de ces corps et au centre des forces.
On peut rapporter la force centripète motrice au corps, en la considérant comme l'effort que fait le corps entier pour s'approcher du centre, lequel effort est composé de celui de toutes ses parties. La force centripète accélératrice peut se rapporter au lieu du corps, en considérant cette force en tant qu'elle se répand du centre dans tous les lieux qui l'environnent, pour mouvoir les corps qui s'y rencontrent.
Enfin on rapporte la force centripète absolue au centre, comme à une certaine cause sans laquelle les forces motrices ne se propageraient point dans tous les lieux qui entourent le centre, soit que cette cause soit un corps central quelconque, (comme l'aimant dans le centre de la force magnétique et la terre dans le centre de la force gravitante), soit que ce soit quelle qu'autre cause qu'on n'aperçoit pas. Cette façon de considérer la force centripète est purement mathématique et je ne prétends point en donner la cause physique. La force centripète accélératrice est donc à la force centripète motrice ce que la vitesse est au mouvement car de même que la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse, la quantité de la force centripète motrice est le produit de la force centripète accélératrice par la masse, car la somme de toutes les actions de la force centripète accélératrice sur chaque particule du corps est la force centripète motrice du corps entier. Donc à la surface de la terre où la force accélératrice de la gravité est la même sur tous les

corps, la gravité motrice ou le poids des corps est proportionnel à leur masse et si on est placé dans des régions où la force accélératrice diminue, le poids des corps diminue pareillement, ainsi il est toujours comme le produit de la masse par la force centripète accélératrice. Dans les régions où la force centripète accélératrice est deux fois moindre, le poids d'un corps sous double ou sous triple est quatre fois ou six fois moindre.
Au reste, je prends ici dans le même sens les attractions et les impulsions accélératrices et motrices et je me sers indifféremment des mots d'impulsion, d'attraction ou de propension quelconque vers un centre, car je considère ces forces mathématiquement et non physiquement, ainsi le lecteur doit bien se garder de croire que j'ai voulu désigner par ces mots une espèce d'action de cause ou de raison physique et lorsque je dis que les centres attirent, lorsque je parle de leurs forces, il ne doit pas penser que j'ai voulu attribuer aucune force réelle à ces centres que je considère comme des points mathématiques.

SCHOLIE

Je viens de faire voir le sens que je donne dans ces ouvrages à des termes qui ne sont pas communément usités. Quant à ceux de temps, d'espace, de lieu et de mouvement, ils sont connus de tout le monde, mais il faut remarquer que pour n'avoir considéré ces quantités que par leurs relations à des choses sensibles on est tombé dans plusieurs erreurs.
Pour les éviter, il faut distinguer le temps, l'espace, le lieu, et le mouvement, en absolus et relatifs, vrais et apparents, mathématiques et vulgaires.

I. Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée. Le temps relatif, apparent et vulgaire est cette mesure sensible et externe d'une partie de durée quelconque (égale ou inégale) prise du mouvement, telles sont les mesures d'heures, de jours, de mois, etc., dont on se sert ordinairement à la place du temps vrai.

II. L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire et immobile.
L'espace relatif est cette mesure ou dimension mobile de l'espace absolu, laquelle tombe sous nos sens par sa relation aux corps et que le vulgaire confond avec l'espace immobile. C'est ainsi, par exemple, qu'un espace, pris au-dedans de la terre ou dans le ciel, est déterminé par la situation qu'il a à l'égard de la terre.
L'espace absolu et l'espace relatif sont les mêmes d'espèce et de grandeur, mais ils ne le sont pas toujours de nombre, car, par exemple, lorsque la terre change de place dans l'espace, l'espace qui contient notre air demeure le même par rapport à la terre, quoique l'air occupe nécessairement les différentes parties de l'espace dans lesquelles il passe et qu'il en change réellement sans cesse.

III. Le lieu est la partie de l'espace occupée par un corps et par rapport à l'espace, il est ou relatif ou absolu.

Je dis que le lieu est une partie de l'espace et non pas simplement la situation du corps, ou la superficie qui l'entoure : car les solides égaux ont toujours des lieux égaux, quoique leurs superficies soient souvent inégales, à cause de la dissemblance de leurs formes ; les situations, à parler exactement, n'ont point de quantité, ce sont plutôt des affections des lieux, que des lieux proprement dits.
De même que le mouvement ou la translation du tout hors de son lieu est la somme des mouvements ou des translations des parties hors du leur, ainsi le lieu du tout est la somme des lieux de toutes les parties et ce lieu doit être interne et être dans tout le corps entier (*et propterea internus et in corpore toto.*)

IV. Le mouvement absolu est la translation des corps d'un lieu absolu dans un autre lieu absolu et le mouvement relatif est la translation d'un lieu relatif dans un autre lieu relatif, ainsi dans un vaisseau poussé par le vent, le lieu relatif d'un corps est la partie du vaisseau dans laquelle ce corps se trouve, ou l'espace qu'il occupe dans la cavité du vaisseau, et cet espace se meut avec le vaisseau, et le repos relatif de ce corps est la permanence dans la même partie de la cavité du vaisseau. Mais le repos vrai du corps est la permanence dans la partie de l'espace immobile, où l'on suppose que se meut le vaisseau et tout ce qu'il contient. Ainsi, si la terre était en repos, le corps qui est dans un repos relatif dans le vaisseau aurait un mouvement vrai et absolu, dont la vitesse serait égale à celle qui emporte le vaisseau sur la surface de la terre, mais la terre se mouvant dans l'espace, le mouvement vrai et absolu de ce corps est composé du mouvement vrai de la terre dans l'espace immobile et du mouvement relatif du vaisseau sur la surface de la terre et si le corps avait un mouvement relatif dans le vaisseau, son mouvement vrai et absolu serait composé de son mouvement relatif dans le vaisseau, du mouvement relatif du vaisseau sur la terre et du mouvement vrai de la terre dans l'espace absolu. Quant au mouvement relatif de ce corps sur la terre, il serait formé dans ce cas de son mouvement relatif dans le vaisseau et du mouvement relatif du vaisseau sur la terre. De sorte que si la partie de la terre où se trouve ce vaisseau ait un mouvement vrai vers l'orient, avec une vitesse divisée en 10010 parties, que le vaisseau soit emporté vers l'occident avec 10 parties de cette vitesse et que le pilote se promène dans le vaisseau vers l'orient, avec une partie de cette même vitesse, ce pilote aurait un mouvement réel et absolu dans l'espace immobile, avec 10001 parties de vitesse vers l'orient et un mouvement relatif sur la terre vers l'occident avec 9 parties de vitesse. On distingue en astronomie le temps absolu du temps relatif par l'équation du temps. Car les jours naturels sont inégaux, quoiqu'on les prenne communément pour une mesure égale du temps et les astronomes corrigent cette inégalité, afin de mesurer les mouvements célestes par un temps plus exact.
Il est très possible qu'il n'y ait point de mouvement parfaitement égal qui puisse servir de mesure exacte du temps car tous les mouvements peuvent être accélérés et retardés, mais le temps absolu doit toujours couler de la même manière.
La durée ou la persévérance des choses est donc la même, soit que les mouvements soient prompts, soit qu'ils soient lents et elle serait encore la même, quand il n'y aurait aucun mouvement ; ainsi il faut bien distinguer le temps de ses mesures sensibles et c'est ce qu'on fait par l'équation astronomique. La nécessité de cette

équation dans la détermination des phénomènes se prouve assez par l'expérience des horloges à pendule et par les observations des éclipses des satellites de Jupiter. L'ordre des parties de l'espace est aussi immuable que celui des parties du temps, car si les parties de l'espace sortaient de leur lieu, ce serait, si l'on peut s'exprimer ainsi, sortir d'elles-mêmes. Les temps et les espaces n'ont pas d'autres lieux qu'eux-mêmes, et ils sont les lieux de toutes les choses. Tout est dans le temps quant à l'ordre de la succession, tout est dans l'espace quant à l'ordre de la situation. C'est là ce qui détermine leur essence et il serait absurde que les lieux primordiaux se puissent se mouvoir. Ces lieux sont donc les lieux absolus et la seule translation de ces lieux fait les mouvements absolus.

Comme les parties de l'espace ne peuvent être vues ni distinguées les unes des autres par nos sens, nous y suppléons par des mesures sensibles. Ainsi, nous déterminons les lieux par les positions et les distances à quelque corps que nous regardons comme immobile et nous mesurons ensuite les mouvements des corps par rapport à ces lieux ainsi déterminés : nous nous servons donc des lieux et des mouvements relatifs à la place des lieux et des mouvements absolus et il est à propos d'en user ainsi dans la vie civile, mais dans les matières philosophiques, il faut faire abstraction des sens, car il se peut faire qu'il n'y ait aucun corps véritablement en repos, auquel on puisse rapporter les lieux et les mouvements.

Le repos et le mouvement relatifs et absolus sont distingués par leurs propriétés, leurs causes et leurs effets. La propriété du repos est que les corps véritablement en repos y sont les uns à l'égard des autres. Ainsi, quoiqu'il soit possible qu'il y ait quelque corps dans la région des fixes, ou beaucoup au-delà, qui soit dans un repos absolu, comme on ne peut pas connaître par la situation qu'ont entre eux les corps d'ici-bas, si quelqu'un de ces corps conserve ou non sa situation par rapport à ce corps éloigné, on ne saurait déterminer, par le moyen, de la situation que ces corps ont entre eux, s'ils sont véritablement en repos.

La propriété du mouvement est que les parties qui conservent des positions données par rapport aux touts participent aux mouvements de ces touts ; car si un corps se meut autour d'un axe, toutes ses parties font effort pour s'éloigner de cet axe et s'il a un mouvement progressif, son mouvement total est la somme des mouvements de toutes ses parties. De cette propriété il suit que si un corps se meut, les corps qu'il contient et qui sont par rapport à lui dans un repos relatif se meuvent aussi ; et par conséquent le mouvement vrai et absolu ne saurait être défini par la translation du voisinage des corps extérieurs que l'on considère comme en repos. Il faut que les corps extérieurs soient non seulement regardés comme en repos, mais qu'ils y soient véritablement : autrement les corps qu'ils renferment, outre leur translation du voisinage des ambiants, participeront encore au mouvement vrai des ambiants et s'ils ne changeaient point de position par rapport aux parties des ambiants ils ne seraient pas pour cela véritablement en repos, mais ils seraient seulement considérés comme en repos. Les corps ambiants sont à ceux qu'ils contiennent, comme toutes les parties extérieures d'un corps sont à toutes ses parties intérieures, ou comme l'écorce est au noyau. Or l'écorce étant mue, le noyau se meut aussi, quoiqu'il ne change point sa situation par rapport aux parties de l'écorce qui l'environnent.

Il suit de cette propriété du mouvement qu'un lieu étant mû, tout ce qu'il contient se meut aussi et par conséquent qu'un corps qui se meut dans un lieu mobile participe au mouvement de ce lieu. Tous les mouvements qui s'exécutent dans des lieux mobiles ne sont donc que les parties des mouvements entiers et absolus. Le mouvement entier et absolu d'un corps est composé du mouvement de ce corps dans le lieu où l'on le suppose, du mouvement de ce lieu dans le lieu où il est placé lui-même et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un lieu immobile, comme dans l'exemple du pilote dont on a parlé ci-dessus. Ainsi les mouvements entiers et absolus ne peuvent se déterminer qu'en les considérant dans un lieu immobile : et c'est pourquoi j'ai rapporté ci-dessus les mouvements absolus à un lieu immobile et les mouvements relatifs à un lieu mobile. Il n'y a de lieux immobiles que ceux qui conservent à l'infini dans tous les sens leurs situations respectives et ce sont ces lieux qui constituent l'espace que j'appelle immobile.

Les causes par lesquelles on peut distinguer le mouvement vrai du mouvement relatif sont les forces imprimées dans les corps pour leur donner le mouvement, car le mouvement vrai d'un corps ne peut être produit ni changé que par des forces imprimées à ce corps même, au lieu que son mouvement relatif peut être produit et changé, sans qu'il éprouve l'action d'aucune force : il suffit qu'il y ait des forces qui agissent sur les corps par rapport auxquels on le considère, puisque ces corps étant mus, la relation dans laquelle consiste le repos ou le mouvement relatif change, de même, le mouvement absolu d'un corps peut changer, sans que son mouvement relatif change ; car si les forces qui agissent sur ce corps agissaient en même temps sur ceux par rapport auxquels on le considère et de telle sorte que les relations restent toujours les mêmes, le mouvement relatif qui n'est autre chose que ces relations ne changerait point. Ainsi le mouvement relatif peut changer, tandis que le mouvement vrai et absolu reste le même et il peut se conserver aussi, quoique le mouvement absolu change ; il est donc sûr que le mouvement absolu ne consiste point dans ces sortes de relations.

Les effets par lesquels on peut distinguer le mouvement absolu du mouvement relatif sont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement, car dans le mouvement circulaire purement relatif ces forces sont nulles et dans le mouvement circulaire vrai et absolu elles sont plus ou moins grandes selon la quantité du mouvement.

Si on fait tourner en rond un vase attaché à une corde jusqu'à ce que la corde, à force d'être torse, devienne en quelque sorte inflexible, si on met ensuite de l'eau dans ce vase et qu'après avoir laissé prendre à l'eau et au vase l'état de repos, on donne à la corde la liberté de se détortiller, le vase acquerra par ce moyen un mouvement qui se conservera très longtemps : au commencement de ce mouvement la superficie de l'eau contenue dans le vase restera plane, ainsi qu'elle l'était avant que la corde se détortille ; mais ensuite le mouvement du vase se communiquant peu à peu à l'eau qu'il contient, cette eau commencera à tourner, à s'élever vers les bords et à devenir concave, comme je l'ai éprouvé et son mouvement s'augmentant, les bords de cette eau s'élèveront de plus en plus, jusqu'à ce que les révolutions s'achevant dans des temps égaux à ceux dans lesquels le vase fait un tour entier, l'eau sera dans un repos relatif par rapport à ce vase. L'ascension de l'eau vers les

bords du vase marque l'effort qu'elle fait pour s'éloigner du centre de son mouvement et on peut connaître et mesurer par cet effort le mouvement circulaire vrai et absolu de cette eau, lequel est entièrement contraire à son mouvement relatif, car dans le commencement où le mouvement relatif de l'eau dans le vase était le plus grand, ce mouvement n'excitait en elle aucun effort pour s'éloigner de l'axe de son mouvement : l'eau ne s'élevait point vers les bords du vase, mais elle demeurait plane et par conséquent elle n'avait pas encore de mouvement circulaire vrai et absolu : lorsque ensuite le mouvement relatif de l'eau vint à diminuer, l'ascension de l'eau vers les bords du vase marquait l'effort qu'elle faisait pour s'éloigner de l'axe de son mouvement et cet effort qui allait toujours en augmentant indiquait l'augmentation de son mouvement circulaire vrai. Enfin, ce mouvement vrai fut le plus grand lorsque l'eau fut dans un repos relatif dans le vase. L'effort que faisait l'eau pour s'éloigner de l'axe de son mouvement ne dépendait donc point de sa translation du voisinage des corps ambiants et par conséquent le mouvement circulaire vrai ne peut se déterminer par de telles translations.

Le mouvement vrai circulaire de tout corps qui tourne est unique et il répond à un seul effort qui est la mesure naturelle et exacte ; mais les mouvements relatifs sont variés à l'infini, selon toutes les relations aux corps extérieurs et tous ces mouvements, qui ne sont que des relations, n'ont aucun effet réel, qu'en tant qu'ils participent du mouvement vrai et unique. De là il suit que dans le système de ceux qui prétendent que nos cieux tournent au-dessous des cieux des étoiles fixes et qu'ils emportent les planètes par leurs mouvements, toutes les parties des cieux et les planètes qui sont en repos par rapport aux cieux qui les environnent se meuvent réellement car elles changent leur position entre elles (au contraire de ce qui arrive aux corps qui sont dans un repos absolu) et étant transportées avec les cieux qui les entourent, elles sont effort, ainsi que les parties des touts qui tournent, pour s'éloigner de l'axe du mouvement.

Les quantités relatives ne sont donc pas les véritables quantités dont elles portent le nom, mais ce sont les mesures sensibles, (exactes ou non exactes) que l'on emploie ordinairement pour les mesurer. Or, comme la signification des mots doit répondre à l'usage qu'on en fait, on aurait tort si on entendait par les mots de temps, d'espace, de lieu et de mouvement, autre chose que les mesures sensibles de ces quantités, excepté dans le langage purement mathématique. Lorsqu'on trouve donc ces termes dans l'écriture, ce serait faire violence au texte sacré, si au lieu de les prendre pour les quantités qui leur servent de mesures sensibles, on les prenait pour les véritables quantités absolues, ce serait de même aller contre le but de la philosophie et des mathématiques, de confondre ces mêmes mesures sensibles ou quantités relatives avec les quantités absolues qu'elles mesurent.

Il faut avouer qu'il est très difficile de connaître les mouvements vrais de chaque corps et de les distinguer actuellement des mouvements apparents, parce que les parties de l'espace immobile dans lesquelles s'exécutent les mouvements vrais, ne tombent pas sous nos sens. Cependant il ne faut pas en désespérer entièrement, car on peut se servir, pour y parvenir, tant des mouvements apparents, qui sont les différences de mouvements vrais, que des forces qui sont les causes et les effets des mouvements vrais. Si, par exemple, deux globes attachés l'un à l'autre par le

moyen d'un fil de longueur donnée viennent à tourner autour de leur centre commun de gravité, la tension du fil se fera connaître l'effort qu'ils font pour s'écarter du centre du mouvement et donnera par ce moyen la quantité du mouvement circulaire. Ensuite, si en frappant ces deux globes en même temps, dans des sens opposés, et avec des forces égales, on augmente ou on diminue le mouvement circulaire, on connaîtra par l'augmentation ou la diminution de la tension du fil, l'augmentation ou la diminution du mouvement et enfin on trouvera par ce moyen les côtés de ces globes où les forces doivent être imprimées pour augmenter le plus qu'il est possible le mouvement, c'est-à-dire les côtés qui se meuvent parallèlement au fil et qui suivent son mouvement, connaissant donc ces côtés et leurs opposés qui précèdent le mouvement du fil on aura la détermination du mouvement.
On parviendrait de même à connaître la quantité et la détermination de ce mouvement circulaire dans un vide quelconque immense, où il n'y aurait rien d'extérieur ni de sensible à quoi on put rapporter le mouvement de ces globes. Si dans cet espace il se trouvait quelques autres corps très éloignés qui conservent toujours entre eux une position donnée, tels que sont les étoiles fixes, on ne pourrait savoir par la translation relative des globes par rapport à ces corps s'il faudrait attribuer le mouvement aux globes ou s'il le faudrait supposer dans ces corps, amis si en faisant attention au fil qui joint les globes on trouvait sa tension telle que le mouvement des globes le requiert, alors non seulement on verrait avec certitude que ce sont les globes qui se meuvent et que les autres corps sont en repos, mais on aurait la détermination du mouvement de ces globes par leurs translations relatives à l'égard des corps. On fera voir plus amplement dans la suite comment les mouvements vrais peuvent se connaître par leurs causes, leurs effets et leurs différences apparentes et comment on peut connaître au contraire par les mouvements vrais ou apparents leurs causes et leurs effets et c'est principalement dans cette vue qu'on a composé ces ouvrages.

AXIOMES, OU LOIS DU MOUVEMENT

PREMIERE LOI

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.

II. LOI

Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.

Si une force produit un mouvement quelconque, une force double de cette première produira un mouvement double et une force triple un mouvement triple, soit qu'elle ait été imprimée en un seul coup, soit qu'elle l'ait été peu à peu et successivement et ce mouvement étant toujours déterminé du même côté que la force génératrice sera ajouté au mouvement que le corps est supposé avoir déjà s'il conspire avec lui, ou en sera retranché, s'il lui est contraire, ou bien sera retranché ou ajouté en partie s'il lui est oblique et de ces deux mouvements il s'en formera un seul dont la détermination sera composée des deux premières.

III. LOI

L'action est toujours égale et opposée à la réaction, c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et dans des directions contraires.

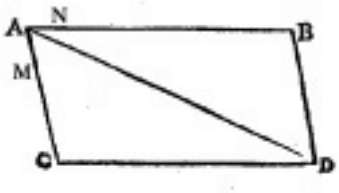
Tout corps qui presse ou tire un autre corps est en même temps tiré ou pressé lui-même par cet autre corps. Si on presse une pierre avec le doigt, le doigt est pressé en même temps par la pierre. Si un cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il est également tiré par la pierre car la corde qui les joint et qui est tendue des deux côtés fait un effort égal pour tirer la pierre vers le cheval et le cheval vers la pierre et cet effort s'oppose autant au mouvement de l'un qu'il excite le mouvement de l'autre. Si un corps en frappe un autre et qu'il change son mouvement de

quelque façon que ce soit, le mouvement du corps choquant sera aussi changé de la même quantité et dans une direction contraire par la force du corps choqué à cause de l'égalité de leur pression mutuelle. Par ces actions mutuelles il se fait des changements égaux, non pas de vitesse, mais de mouvement, pourvu qu'il ne s'y mêle aucune cause étrangère, car les changements de vitesse qui se font de la même manière dans des directions contraires doivent être réciproquement proportionnels aux masses, parce que les changements de mouvement sont égaux. Cette loi a lieu aussi dans les attractions, comme je le prouverai dans le scholie suivant.

COROLLAIRE I

Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la diagonale d'un parallélogramme dans le même temps dans lequel il aurait parcouru ses côtés séparément.

Si le corps, pendant un temps donné, eut été transporté de A en B, d'un mouvement uniforme par la seule force M imprimée en A ; et que par la seule force N, imprimée dans le même lieu A, il eut été transporté de A en C, le corps par ces deux forces réunies sera transporté dans le même temps dans la diagonale AD du parallélogramme $ABCD$; car puisque la force N agit selon la ligne AC parallèle à

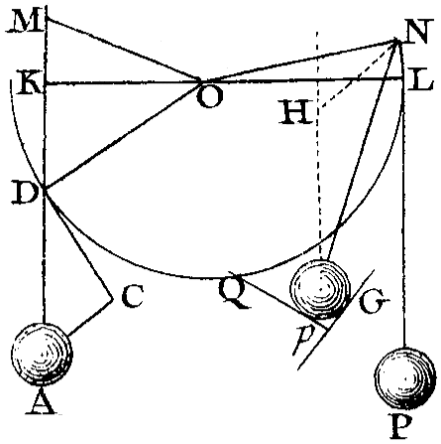


BD, cette force, selon la seconde loi du mouvement ne changera rien à la vitesse avec laquelle ce corps s'approche de cette ligne BD, par l'autre force M. Le corps s'approchera donc de la ligne BD dans le même temps, soit que la force N lui soit imprimée, soit qu'elle ne le soit pas ; ainsi à la fin de ce temps il sera dans quelque point de cette ligne BD. On prouvera de la même manière qu'à la fin de ce même temps le corps sera dans un point quelconque de la ligne CD. Donc il sera nécessairement dans le point d'intersection D de ces deux lignes et par la première loi il ira d'un mouvement rectiligne de A en D.

COROLLAIRE II

D'où l'on voit qu'une force directe AD est composée des forces obliques quelconques AB et BD et réciproquement qu'elle peut toujours se résoudre dans les forces obliques quelconques AB et BD. Cette résolution et cette composition des forces se trouvent confirmées à tout moment dans la mécanique.

Supposons que du centre O d'une roue partent des rayons inégaux OM, ON qui soutiennent par des fils MA, NP des poids A et P, et qu'on cherche les forces de ces poids pour faire tourner cette roue.
On mènera d'abord par le centre O la droite KOL perpendiculaire en K et en L aux fils MA, NP et du centre O et de l'intervalle OL, le plus grand des intervalles OK, OL on décrira un cercle. On tirera ensuite par le centre O et par l'intersection D de ce cercle avec le fil MA la droite OD à laquelle on mènera par A la parallèle AC, terminée en C par la droite DC, qui lui est perpendiculaire. Cela posé, comme il est indifférent que les points K, L, D, des fils soient attachés ou non au plan de la roue, les poids seront le même effet, soit qu'ils soient attachés aux points K et L, soit qu'ils soient attachés aux points D et L.



Soit donc exprimée la force totale du corps A par la ligne AD et soit cette force décomposée dans les deux forces AC et CD, la première AC tirant le rayon OD dans sa direction, ne contribue point au mouvement de la roue, mais la seconde DC tirant le rayon OD perpendiculairement fait le même effet que si elle tirait perpendiculairement le rayon OL égal à OD, c'est-à-dire qu'elle sera équivalente au poids P, pourvu que ce poids soit au poids A, comme la force DC est à la force DA, ou, ce qui revient au même (à cause des triangles semblables ADC, DOK) comme OK à OD ou OL : Donc si les poids A et P sont pris dans la raison renversée des rayons OK, OL, auxquels ils sont appliqués, ils seront en équilibre, ce qui est la propriété si connue du levier, de la balance et du treuil. Si l'un des poids est à l'autre dans une plus grande raison, sa force en sera d'autant plus grande pour mouvoir la roue.
Supposons présentement que le poids p égal au poids P, soit en partie soutenu par le fil Np et en partie par le plan pG, on mènera pH et NH, la première perpendiculaire à l'horizon et l'autre au plan pG et prenant pH pour exprimer la force avec laquelle le corps p tend en bas, on décomposera cette force dans les deux pH et NH. Imaginant ensuite que le poids p, au lieu d'être attaché au fil Np, fut arrêté par un plan pQ perpendiculaire à la direction Np et coupant le plan pG, dans une ligne parallèle à l'horizon, il est clair que les forces avec lesquelles le corps presserait les plans pQ, pG, qui le retiendraient dans cette supposition seraient

exprimées, la première par pN et la seconde par HN. Donc en supprimant le plan pQ et laissant le fil Np qui fait absolument le même effet, la tension de ce fil sera la même force pN avec laquelle le plan pQ était pressé.
Ainsi la tension du fil, lorsqu'il est dans la situation oblique pN, est à la tension du même fil, lorsqu'il a, comme dans le cas précédent, la situation perpendiculaire PN, comme pN à pH. C'est pourquoi si le poids p est au poids A dans la raison composée de la raison réciproque des moindres distances du centre de la roue aux fils pN et AM et de la raison directe de pH à pN, ces poids auront une égale force pour faire mouvoir la roue et seront par conséquent en équilibre, ce dont tout le monde peut reconnaître la vérité.
Le poids p, en s'appuyant sur ces deux plans obliques est dans le même cas qu'un coin entre les deux surfaces internes du corps qu'il fend : et on peut connaître par là les forces du coin et du marteau, puisqu'en effet la force avec laquelle le corps p presse le plan pQ est à la force avec laquelle ce même corps est poussé vers ces plans, suivant la ligne perpendiculaire pH, par la force de sa gravité ou par les coups du marteau, comme pN à pH et à la force par laquelle il presse l'autre plan pG, comme pN à HN.
On peut par une semblable décomposition des forces trouver la force de la vis, car la vis n'est autre chose qu'un coin mû par un levier, ce qui fait voir la fécondité de ce corollaire et fournit de nouvelles preuves de sa vérité ; il peut servir de base à toute la mécanique dans laquelle on a employé jusqu'à présent tant de différents principes.
On en tire aisément, par exemple, les forces de toutes les machines composées de roues, de tambours, de poulies, de leviers, de cordes tendues, de poids montant directement ou obliquement et, enfin, de toutes les puissances dont les machines sont ordinairement composées ; on en tirerait aussi les forces nécessaires aux tendons pour mouvoir les membres des animaux.

COROLLAIRE III

La quantité de mouvement qui résulte de la somme de tous les mouvements vers le même côté et de leurs différences vers des côtés opposés ne change point par l'action des corps entre eux.

L'action et la réaction sont égales, suivant la troisième loi ; donc par la seconde elles produisent dans les mouvements des changements égaux dans des directions opposées. Donc si les mouvements se font du même côté, ce qui sera ajouté au mouvement du corps chassé, doit être ôté du mouvement de celui qui le suit, de sorte que la somme des mouvements demeure la même qu'auparavant. Si les corps viennent de deux côtés opposés, il faudra retrancher également du mouvement de ces deux corps et par conséquent la différence des mouvements vers des côtés opposés demeurera toujours la même.
Supposons, par exemple, que la boule A soit triple de la boule B et qu'elle ait deux parties de vitesse et que B la suive dans la même ligne droite avec 10 parties de vitesse, le mouvement du corps A sera à celui du corps B, comme 6 à 10 : Prenant

donc 6 et 10 pour exprimer les quantités de mouvement de ces corps, 16 sera la somme de leurs mouvements.
Lorsque ces corps viendront à se rencontrer, si le corps A gagne 3, 4 ou 5 parties de mouvement, le corps B en perdra autant, de sorte que le corps A, après la réflexion continuant son chemin avec 9, 10 ou 11 parties de mouvement, le corps B ira avec 7, 6 ou 5 et la somme sera toujours de 16 parties comme auparavant. Si le corps A gagne 9, 10, 11 ou 12 parties et qu'il poursuive par conséquent son chemin après le choc avec 15, 16, 17 ou 18 parties de mouvement, le corps B perdant tout ce que le corps A gagne, continuera de se mouvoir vers le même côté avec une partie de mouvement, après en avoir perdu 9 ou il restera en repos, ayant perdu les 10 parties de mouvement progressif qu'il avait, ou il retournera vers le côté opposé avec un degré de mouvement, après avoir perdu tout ce qu'il avait et même une partie de plus (si je puis m'exprimer ainsi), ou bien enfin il retournera vers le côté opposé avec deux parties de mouvement, après avoir perdu 12 parties de son mouvement progressif. Ainsi les sommes des mouvements conspirants $15 + 1$ ou $16 + 0$ et les différences des mouvements opposés $17 - 1$ et $18 - 2$, seront toujours 16 parties comme avant le choc et la réflexion : Connaissant donc la quantité de mouvement avec laquelle les corps se meuvent après la réflexion, on trouvera la vitesse de chacun en supposant que cette vitesse soit à la vitesse avant la réflexion, comme le mouvement après la réflexion est au mouvement avant la réflexion. Ainsi dans le dernier cas où le corps A avait 6 parties de mouvement avant la réflexion et 18 après et 2 de vitesse avant la réflexion, on trouverait que la vitesse après la réflexion serait 6 en disant, comme 6 parties de mouvement avant la réflexion sont à 18 parties après la réflexion, ainsi 2 de vitesse avant la réflexion sont à 6 de vitesse après la réflexion.
Si les corps n'étaient pas sphériques ou que se mouvant suivant diverses lignes droites ils vinrent à se choquer obliquement, pour trouver leur mouvement après la réflexion, il faudra commencer par connaître la situation du plan qui touche tous les corps choquant au point de concours : Ensuite (par le Corollaire 2) on décomposera le mouvement de chaque corps en deux mouvements, l'un perpendiculaire et l'autre parallèle à ce plan tangent : et, comme les corps n'agissent les uns sur les autres que selon la ligne perpendiculaire au plan tangent, les mouvements parallèles seront les mêmes après et avant la réflexion, et les mouvements perpendiculaires éprouveront des changements égaux vers les côtés opposés, de sorte que la somme des mouvements conspirants et la différence des mouvements opposés resteront toujours les mêmes qu'auparavant. C'est de ces sortes de réflexions que viennent ordinairement les mouvements circulaires des corps autour de leurs centres, mais je ne considèrerai point ces cas dans la suite, parce qu'il serait trop long de démontrer tout ce qui y a rapport.

COROLLAIRE IV

Le centre commun de gravité de deux corps ou de plusieurs corps ne change point son état de mouvement ou de repos, par l'action réciproque de ces corps, ainsi le centre commun de gravité de tous

les corps qui agissent les uns sur les autres (supposé qu'il n'y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur) est toujours en repos, ou se meut uniformément en ligne droite.

Car, si deux points se meuvent uniformément en ligne droite et que leur distance soit divisée en raison donnée, le point de division sera en repos, ou il se mouvra uniformément en ligne droite. C'est ce qu'on trouvera démontré ci-après dans le Lemme 23 et dans son Corollaire, pour le cas où les deux points se meuvent dans le même plan, et ce qui se démontre facilement par la même méthode pour le cas où les deux points seraient dans des plans différents. Donc, si des corps quelconques se meuvent uniformément en ligne droite, le commun centre de gravité de deux de ces corps ou sera en repos ou se mouvra uniformément en ligne droite, parce que la ligne qui joint les centres de ces corps sera divisée par leur centre commun de gravité dans une raison donnée. De même le commun centre de gravité de ces deux corps et d'un troisième sera en repos ou se mouvra uniformément en ligne droite, parce que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces deux corps et le centre du troisième sera encore divisée par le commun centre de gravité de ces trois corps en raison donnée. Enfin, le commun centre de gravité de ces trois corps et d'un quatrième quelconque sera en repos ou sera m° uniformément en ligne droite, parce que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces trois corps et le centre du quatrième sera divisée par le centre commun de gravité de ces quatre corps en raison donnée et ainsi à l'infini. Donc dans un système de corps dont les actions réciproques les uns sur les autres ne sont point troublées par aucune action ou empêchement externe et dont par conséquent chacun se meut uniformément en ligne droite, le commun centre de gravité de tous ces corps sera en repos ou sera m° uniformément en ligne droite.

De plus, dans un système composé de deux corps qui agissent l'un sur l'autre, les distances des centres de chacun de ces corps à leur commun centre de gravité étant en raison réciproque de la masse de ces corps, les mouvements relatifs de ces corps, pour s'éloigner ou pour s'approcher de ce centre commun de gravité seront égaux entre eux. Donc, ni les changements égaux qui se font dans le mouvement de ces corps en sens contraire, ni par conséquent leur action mutuelle l'un sur l'autre ne changeront rien à l'état de leur centre commun de gravité qui ne sera ni accéléré ni retardé et qui ne recevra enfin aucune altération dans son état de mouvement ou de repos.

Puisque dans un système de plusieurs corps, le centre de gravité de deux quelconques de ces corps qui agissent l'un sur l'autre ne change point d'état par cette action, et que le commun centre de gravité des autres avec lesquels cette action n'a aucun rapport n'en souffre aucune altération ; la distance de ces deux centres sera divisée par le centre commun de tous ces corps dans des parties réciproquement proportionnelles aux sommes totales des corps dont ils sont les centres et par conséquent ces deux centres conservant leur état de repos ou de mouvement, le centre commun de tous ces corps conservera aussi le sien, car il est clair que le centre commun de tous ces corps ne changera point son état de repos ou de mouvement par les actions de deux quelconques de ces corps entre eux.

Or, dans un tel système, toutes les actions des corps les uns sur les autres ou sont exercées entre deux corps ou sont composées d'actions entre deux corps et par conséquent elles ne produisent aucun changement dans l'état de repos ou de mouvement du centre commun de tous ces corps. C'est pourquoi comme ce centre est en repos, ou qu'il se meut uniformément en ligne droite lorsque les corps n'agissent point les uns sur les autres, il continuera de même, malgré l'action réciproque de ces corps à être en repos, ou à se mouvoir uniformément en ligne droite, pourvu qu'il ne soit point tiré de son état par des forces étrangères. La loi d'un système de plusieurs corps est donc la même que celle d'un corps seul, quant à la permanence dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite où ils se trouvent. Et le mouvement progressif d'un corps ou d'un système de corps doit toujours s'estimer par le mouvement de leur centre de gravité.

COROLLAIRE V

Les mouvements des corps enfermés dans un espace quelconque sont les mêmes entre eux, soit que cet espace soit en repos, soit qu'il se meuve uniformément en ligne droite sans mouvement circulaire.

Car les différences des mouvements qui tendent vers le même côté et les sommes de ceux qui tendent vers des côtés opposés sont les mêmes au commencement du mouvement dans l'un et l'autre cas (par l'hypothèse), mais c'est de ces sommes ou de ces différences qu'on tire l'effort avec lequel les corps se choquent mutuellement : Donc, par la seconde loi, les effets du choc seront les mêmes dans ces deux cas et, par conséquent, les mouvements de ces corps entre eux, dans un de ces cas, demeureront égaux à leurs mouvements entre eux dans l'autre cas, ce que l'expérience confirme tous les jours. Car les mouvements qui se font dans un vaisseau sont les mêmes entre eux, soit que le vaisseau marche uniformément en ligne droite, soit qu'il soit en repos.

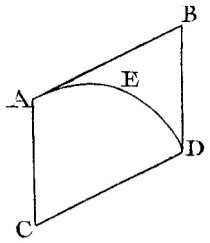
COROLLAIRE VI

Si des corps se meuvent entre eux d'une façon quelconque, et qu'ils soient poussés par des forces accélératrices égales, et qui agissent sur eux, suivant des lignes parallèles, ils continueront à se mouvoir entre eux de la même manière que si ces forces ne leur avaient pas été imprimées.

Car ces forces agissant également (par rapport à la quantité de matière des corps à mouvoir) et suivant des lignes parallèles, elles feront mouvoir tous ces corps avec des vitesses égales par la seconde loi. Ainsi elles ne changeront point les positions et les mouvements de ces corps entre eux.

SCHOLIE

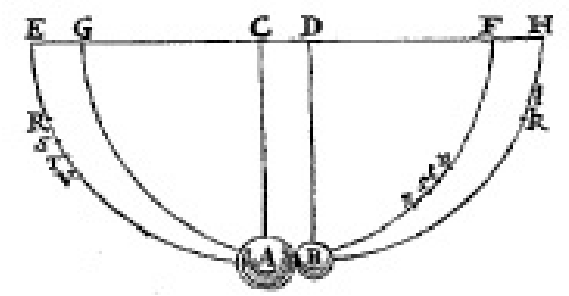
Les principes que j'ai expliqués jusqu'à présent sont reçus de tous les mathématiciens et confirmés par une infinité d'expériences. Les deux premières lois du mouvement et les deux premiers corollaires ont fait découvrir à Galilée que la descente des graves est en raison doublée du temps et que les projectiles décrivent une parabole, ce qui est conforme à l'expérience, si on fait abstraction de la résistance de l'air qui retarde un peu tous ces mouvements.
La gravité étant uniforme, elle agit également à chaque particule égale de temps, ainsi elle imprime au corps qui tombe des vitesses et des forces égales : et dans le temps total elle lui imprime une force totale et une vitesse totale proportionnelle au temps. Mais les espaces décrits dans des temps proportionnels sont comme les vitesses et les temps conjointement, c'est-à-dire, en raison doublée des temps. Donc, lorsque les corps sont jetés en haut, la gravité leur imprime des forces et leur ôte des vitesses proportionnelles au temps. Ainsi les temps que ces corps mettent à monter à la plus grande hauteur sont comme les vitesses que la gravité leur fait perdre et ces hauteurs sont comme les temps multipliés par les vitesses, ou en raison doublée des vitesses. Le mouvement d'un corps jeté suivant une ligne droite quelconque est donc composé du mouvement de projection et du mouvement que la gravité lui imprime. De sorte que si le corps A, par le seul mouvement de projection peut décrire dans un temps donné la droite AB, et que par le seul mouvement qui le porte vers la terre il puisse décrire la ligne AC dans le même temps, en achevant le parallélogramme $ABCD$, ce corps, par un mouvement composé, sera à la fin de ce temps au lieu D et la courbe AED qu'il décrira sera une parabole que la droite AB touchera au point A et dont l'ordonnée BD sera proportionnelle à AB^2. C'est sur ces mêmes lois et sur leurs corollaires qu'est fondée la théorie des



oscillations des pendules, vérifiée tous les jours par l'expérience. Par ces mêmes lois le *Chevalier Christophe Wrenn, J. Wallis S.T.D.* et *Christiaan Huygens*[1], qui sont sans contredit les premiers géomètres des derniers temps, ont découvert, chacun de leur côté, les lois du choc et de la réflexion des corps durs ; ils communiquèrent presqu'en même temps leurs découvertes à la Société Royale ; ces découvertes s'accordent parfaitement sur ce qui concerne ces lois : *Wallis* fut le premier qui en fit part à la Société Royale, ensuite *Wrenn* et enfin *Huygens*, mais ce fut *Wrenn* qui les confirma par des expériences faites avec des pendules devant la Société Royale, lesquelles le célèbre *Mariotte* a rapportées depuis dans un Traité qu'il a composé exprès sur cette matière.

[1] : Chrétien Hugens, *dans le texte françois*

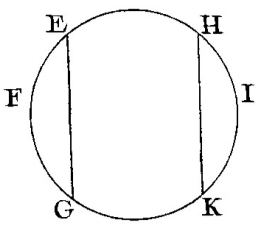
Pour que cette théorie s'accorde parfaitement avec l'expérience, il faut faire attention, tant à la résistance de l'air, qu'à la force élastique des corps qui se choquent. Soit A et B des corps sphériques suspendus à des fils parallèles et égaux ; AC, BD, attachés aux centres C et D, et sont décrits autour de ces points comme centre ; et les intervalles AC, BD, les demi-cercles EAF, GBH séparés chacun en deux parties égales par les rayons AC, BD. Si on élève le corps A jusqu'au point quelconque R de l'arc EAF et qu'ayant ôté le corps B on laisse tomber le corps A et que ce corps, après une oscillation, revienne au point V, RV sera le retardement causé par la résistance de l'air. Si on prend alors ST égale à la quatrième partie de RV et placée de telle sorte que $RS = VT$, ST exprimera à peu près le retardement que le corps A éprouve en descendant de S vers A.



Qu'on remette présentement le corps B à sa place et qu'on laisse tomber le corps A du point S, la vitesse au point A où il doit se réfléchir sera la même, sans erreur sensible que s'il tombait du point T dans le vide. Cette vitesse sera donc exprimée par la corde de l'arc TA, car c'est une proposition connue de tous les géomètres que la vitesse d'un corps suspendu par un fil est au point le plus bas de sa chute, comme la corde de l'arc qu'il a parcouru en tombant.
Supposons que le corps A parvienne après la réflexion en s et le corps B en k, qu'on ôte encore le corps B et qu'on trouve le lieu v duquel laissant tomber le corps A ils reviennent après une oscillation au lieu r, de plus que st soit la quatrième partie de rv placée de telle sorte que $rs = tv$, tA exprimera la vitesse que le corps A avait en A l'instant d'après la réflexion. Car t sera le lieu vrai et corrigé auquel le corps A devrait remonter si l'on faisait abstraction de la résistance de l'air. On corrigera par la même méthode le lieu k, auquel le corps B remonte et on trouvera le lieu l auquel il aurait dû remonter dans le vide et par ce moyen on fera ces expériences aussi exactement dans l'air que dans le vide. Enfin, pour avoir le mouvement du corps A, au lieu A, immédiatement avant la réflexion, il faudra multiplier le corps A, si je puis m'exprimer ainsi, par la corde de l'arc TA qui exprime sa vitesse ; ensuite, il faut le multiplier par la corde de l'arc tA, pour avoir son mouvement au lieu A, immédiatement après la réflexion. De même, il faudra multiplier le corps B par la corde de l'arc Bl, pour avoir son mouvement immédiatement après la réflexion.
Par la même méthode, lorsque les deux corps tomberont en même temps de deux hauteurs différentes, on trouvera le mouvement de l'un et de l'autre, tant avant qu'après la réflexion et l'on pourra toujours, par ce moyen comparer ces mouvements entre eux et en conclure les effets de la réflexion.

Suivant cette méthode, dans les expériences que j'ai faites avec des pendules de 10 pieds de long auxquels j'avais suspendu tantôt des corps égaux, tantôt des corps inégaux et que j'avais fait se choquer en tombant de très haut, comme de 8, 12 et 16 pieds, j'ai toujours trouvé, à des différences près, lesquelles étaient moindres que trois pouces dans les mesures, que lorsque les corps se rencontraient directement, les changements de mouvement vers les points opposés étaient toujours égaux et que par conséquent la réaction était toujours égale à l'action. Lorsque le corps A, par exemple, ayant 9 parties de mouvement venait à choquer le corps B en repos et qu'après avoir perdu 7 parties de mouvement, il continuait après la réflexion à se mouvoir avec deux parties, le corps B rejaillissait avec ces 7 parties.
Si les deux corps allaient l'un vers l'autre, A avec 12 parties de mouvement et B avec 6, et qu'après le choc A s'en retournât avec 2 parties, B s'en retournait avec 8 et il y avait 14 parties de détruites de chaque côté. Car si du mouvement de A on en ôte d'abord 12 parties, il ne lui reste rien : si on ôte ensuite 2 autres parties, il en naît deux parties de mouvement en sens contraire : de même en ôtant 14 parties du mouvement du corps B, il en naît 8 parties vers le côté opposé.
Lorsque les deux corps allaient vers le même côté, A plus vite avec 14 parties de mouvement et B plus lentement avec 5 parties et qu'après la réflexion le corps A continuait de se mouvoir avec 5 parties, le corps B continuait alors à se mouvoir avec 14 parties, de sorte qu'il avait acquis les neuf parties que le corps A avait perdu ; il en était de même dans tous les autres cas. La quantité de mouvement n'était jamais changée par le choc, elle se retrouvait toujours ou dans la somme des mouvements conspirant ou dans la différence des mouvements opposés, et j'ai attribué les erreurs d'un ou deux pouces que j'ai trouvé dans les mesures à la difficulté de prendre ces mesures avec assez d'exactitude, car il était difficile de faire tomber les pendules dans le même instant, de sorte que les corps se rencontrent dans le lieu le plus bas AB et de marquer exactement les lieux s et k auxquels les corps remontaient après le choc et il pouvait encore s'y mêler d'autres causes d'erreur, comme l'inégale densité des parties des corps suspendus, leur différente texture, etc.
Et afin qu'on ne m'objecte pas que la loi que j'ai voulu prouver par ces expériences suppose les corps ou parfaitement durs ou parfaitement élastiques et que nous ne connaissons point de tels corps, j'ajouterai que ces expériences réussissent aussi bien sur les corps mous que sur les corps durs et que par conséquent la vérité de ce principe ne dépend point de la dureté des corps, car si on veut l'appliquer aux cas où les corps ne sont pas parfaitement durs, il faudra seulement diminuer la réflexion dans une certaine proportion relative à la quantité de la force élastique.
Dans la théorie de *Wrenn* et d'*Huygens*, les corps absolument durs, après s'être choqués, s'éloignent l'un de l'autre avec la même vitesse qu'ils avaient dans le choc. On peut l'assurer avec encore plus de certitude des corps parfaitement élastiques. Dans les corps qui ne sont pas parfaitement élastiques, la vitesse avec laquelle ils s'en retournent après le choc doit être diminuée relativement à la force élastique et parce que cette force (pourvu que les parties des corps ne soient point altérées par la collision, ou qu'elles ne souffrent point d'extension comme celle que cause le marteau) est constante et déterminée, ainsi que je l'ai remarqué, elle fait que les

corps rejaillissent avec une vitesse relative qui est à la vitesse qu'ils avaient avant le choc dans une raison donnée.
Je fis aussi cette expérience avec des pelotes de laine très serrées. Je commençai par déterminer la quantité de la force élastique en faisant tomber les pendules et en mesurant la réflexion : et ensuite, connaissant cette force, j'en conclu les réflexions pour d'autres cas et je trouvai que les expériences y répondaient. Les pelotes s'éloignaient toujours l'une de l'autre après le choc avec une vitesse relative qui était à leur vitesse relative dans le choc , comme 5 à 9 environ. Les boules d'acier rejaillissaient à peu près avec leur même vitesse : les boules de liège rejaillissaient avec une vitesse un peu moindre et dans les boules de verre ces vitesses étaient à peu près comme 15 à 16, ainsi, la troisième loi se trouve confirmée dans le choc et dans la réflexion des corps par la théorie et la théorie l'est par l'expérience. Je vais faire voir qu'elle l'est aussi dans les attractions.
Imaginez entre les deux corps A et B un obstacle quelconque qui les empêche de se joindre. Si un de ces corps comme A est plus attiré vers B, que B vers A, l'obstacle sera plus pressé par le corps A que par le corps B ; ainsi il ne sera point en équilibre. La plus forte pression prévaudra et il arrivera que le système composé de ces deux corps et de l'obstacle qui est entre deux se mouvra en ligne droite vers B et qu'il s'en ira à l'infini dans le vide avec un mouvement continuellement accéléré, ce qui est absurde et contraire à la première loi du mouvement car, par cette première loi, ce système doit persévérer dans son état de repos ou de mouvement en ligne droite, ainsi ces deux corps doivent presser également cet obstacle et être, par conséquent, tirés également l'un vers l'autre.
J'en ai fait l'expérience sur le fer et sur l'aimant. Si on pose l'aimant et le fer chacun séparément dans de petits vaisseaux sur une eau dormante et que ces petits vaisseaux se touchent, ni l'un ni l'autre ne sera mû ; mais ils soutiendront, par l'égalité de leur attraction, les efforts mutuels qu'ils font l'un sur l'autre et, étant en équilibre, ils resteront en repos.
De même, la gravité entre la terre et ses parties est mutuelle, car supposé que la terre FI fut coupée par un plan EG en deux parties EGF, EGI : les poids mutuels de ces parties l'une sur l'autre seront égaux ; car si la plus grande partie EGI est coupée par un autre plan HK parallèle au premier, en deux parties $EGHK$ et HIK, desquelles $HIK = EFG$, il est clair que la partie du milieu $EGHK$ ne sera portée par son propre poids ni vers l'une, ni vers l'autre de ces parties, mais qu'elle restera en équilibre entre elles.



Quant à la partie HIK, elle pressera de tout son poids la partie du milieu vers l'autre partie EFG ; donc la force avec laquelle la partie EGI, composée des par-

ties HKI et $EGHK$, tend vers la troisième partie EFG, est égale au poids de la partie HIK, c'est-à-dire au poids de la troisième partie EFG. Ainsi le poids de deux parties EGI, EFG, l'une sur l'autre est égal, ce que je voulais prouver. Et si ces poids n'étaient pas égaux, toute la terre qui nage librement dans l'éther céderait au plus grand de ces poids et s'en irait à l'infini.
De même que les corps qui se choquent se font équilibre, quand leurs vitesses sont réciproquement comme leurs forces d'inertie (*ut vires infitæ :*) les puissances qui agissent dans la mécanique se contrebalancent et détruisent leurs efforts mutuels, quand leurs vitesses dans la direction des forces sont réciproquement comme ces forces. Ainsi des poids attachés aux bras d'une balance font des efforts égaux pour la mouvoir, lorsque ces poids sont réciproquement comme les vitesses qu'auraient les bras de la balance en haut et en bas, si elle venait à osciller, c'est-à-dire que ces poids sont en équilibre lorsque les bras de la balance montent et descendent perpendiculairement, s'ils sont entre eux réciproquement comme la distance du point de suspension au fléau de la balance et si les bras de la balance montent et descendent obliquement, soit qu'ils soient soutenus par des plans obliques, ou que quel qu'autre obstacle les empêche de monter et de descendre perpendiculairement, les poids seront en équilibre lorsqu'ils seront entre eux réciproquement, comme l'ascension et la descension perpendiculaire des bras de la balance, parce que la force de la gravité est toujours dirigée perpendiculairement vers la terre.
De même, dans la poulie ou dans le moufle, si la force de la main qui tire la corde directement est au poids qui monte directement ou obliquement, comme la vitesse de son ascension perpendiculaire à la vitesse de la main qui tire la corde, il y aura équilibre.
Dans les horloges et les autres machines dont la construction dépend du jeu de plusieurs roues, les forces contraires qui font des efforts pour les mouvoir et pour les retenir se contrebalanceront mutuellement si elles sont entre elles réciproquement comme les vitesses des parties des roues auxquelles elles sont imprimées.
La force de la vie pour presser un corps est à la force de la main qui tourne la manivelle, comme la vitesse circulaire de la manivelle dans la partie où la main la fait tourner est à la vitesse progressive de la vis vers le corps qu'elle presse.
Les forces avec lesquelles le coin presse les deux côtés du bois qu'il fend sont à la force avec laquelle le marteau frappe le coin, comme le chemin que fait le coin dans la direction de la force que lui impriment les coups du marteau est à la vitesse avec laquelle les parties du bois cèdent au coin selon les lignes perpendiculaires aux faces du coin. Il en est de même dans toutes les machines dont l'efficacité consiste en cela seulement qu'en diminuant la vitesse on augmente la force et réciproquement et c'est par là qu'on résout ce problème dans toutes les espèces de machines que le poids étant donné la force nécessaire pour le mouvoir est donné ou ce qui est la même chose que la résistance étant donnée la force nécessaire pour la surmonter est donnée aussi. Car lorsque les machines seront construites de façon que la vitesse de la puissance soit à celle de la résistance en raison renversée des forces, la puissance égalera la résistance : et si on augmente la vitesse de la puissance, elle vaincra aussitôt la résistance.
Si la disparité des vitesses est assez grande pour vaincre toute espèce de résistance,

tant celle qu'oppose la pesanteur des corps qu'on veut élever, que celle qui vient de la cohésion des corps qu'on veut séparer et que celle qui est produite par le frottement des corps qui glissent les uns sur les autres, la force restante produira une accélération de mouvement qui lui sera proportionnelle et qui sera partagée entre les parties de la machine et le corps résistant ; mais je ne me suis pas proposé ici de donner un traité de mécanique, j'ai voulu montrer seulement combien la troisième loi du mouvement est vraie et combien son usage est étendu, car si on estime l'action de l'agent par sa force multipliée par sa vitesse et qu'on estime de même la réaction du corps résistant par la vitesse de chacune de ses parties multipliées par sa vitesse et qu'on estime de même la réaction du corps résistant par la vitesse de chacune de ses parties multipliées par les forces qu'elles ont pour résister en vertu de leur cohésion, de leur attrition, de leur poids et de leur accélération, l'action et la réaction se trouveront égales entre elles, dans les effets de toutes les machines. Et toutes les fois qu'une action s'exécute par le moyen d'une machine et qu'elle parvient à être imprimée dans un corps résistant, sa dernière détermination est toujours contraire à la détermination de la réaction de ce corps.

DU MOUVEMENT DES CORPS

LIVRE PREMIER

SECTION PREMIÈRE

De la méthode des premières et dernières raisons employée dans tout cet ouvrage.

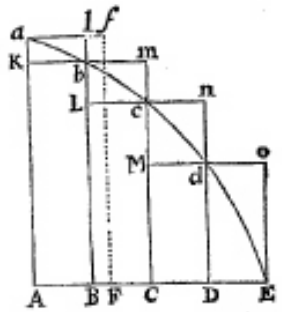
LEMME PREMIER

Les quantités et les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini et qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée deviennent à la fin égales.

Si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales et que leur dernière différence soit D, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée D, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothèse.

LEMME II

Si dans une figure quelconque $AacE$, comprise entre les droites Aa, AE et la courbe acE, on inscrit un nombre quelconque de parallélogrammes Ab, Bc, Cd, etc. compris sous les bases égales AB, BC, CD, etc. et sous les côtés Bb, Cc, Dd, etc. parallèles au côté Aa de la figure et qu'on achève les parallélogrammes $akbl$, $bLcm$, $cMdn$, etc. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes et qu'on augmente leur nombre à l'infini, les dernières raisons qu'auront entre elles la figure inscrite $AkbLcMdD$, la circonscrite $AalbmcndoE$ et la curviligne $AabcdE$, seront des raisons d'égalité.



Car la différence de la figure inscrite et de la figure circonscrite est la somme des parallélogrammes Kl, Lm, Mn, Do, c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle $Abla$ fait sur l'une des bases Kb et sur la somme Aa, de toutes les hauteurs, mais ce rectangle, puisque sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite et à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. C.Q.F.D.

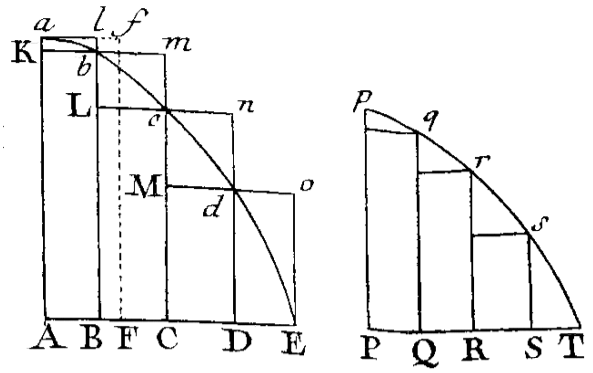
LEMME III

Les dernières raisons de ces mêmes figures seront encore des raisons d'égalité, quoique les bases AB, BC, CD, etc. des parallélogrammes soient inégales, pourvu qu'elles diminuent toutes à l'infini.

Soit AF la plus large de ces bases et soit achevé le parallélogramme $FAaf$. Ce parallélogramme sera plus grand que la différence de la figure inscrite et de la figure circonscrite, mais sa largeur AF diminuant à l'infini, il sera plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc etc. C.Q.F.D.
Cor. 1 : D'où il suit que la dernière somme de tous les parallélogrammes qui s'évanouissent coïncidera dans toutes ses parties avec la figure curviligne.
Cor. 2 : Et, à plus forte raison la figure rectiligne comprise sous les cordes des arcs évanouissants ab, bc, cd, etc. coïncidera à la fin avec la figure curviligne.
Cor. 3 : Il en sera de même de la figure rectiligne circonscrite qui est comprise sous les tangentes de ces mêmes arcs.
Cor. 4 : Et, par conséquent ces dernières figures (quant à leurs périmètres acE) ne sont pas rectilignes, mais les limites curvilignes des figures rectilignes.

LEMME IV

Si dans deux figures $AacE$, $Pprt$, on inscrit, comme ci-dessus, deux suites de parallélogrammes, dont le nombre soit le même et que lorsque leurs largeurs diminuent à l'infini, les dernières raisons des parallélogrammes de l'une des figures aux parallélogrammes de l'autre, chacun à chacun soient les mêmes, ces deux figures $AacE$, $PprT$ seront entre elles dans cette même raison.



Car la proportion qu'un des parallélogrammes de la première figure a avec celui qui lui répond dans la seconde est la même que celle de la somme de tous les parallélogrammes de la première figure à la somme de tous les parallélogrammes de la seconde et par conséquent la même que celle qui est entre les deux figures, en supposant toutefois, que, selon le Lemme 3, la raison de la première figure à la somme de tous les parallélogrammes qu'elle renferme, soit une raison d'égalité, aussi bien que celle de la seconde figure à la somme de tous les parallélogrammes qui y sont renfermés. C.Q.F.D.

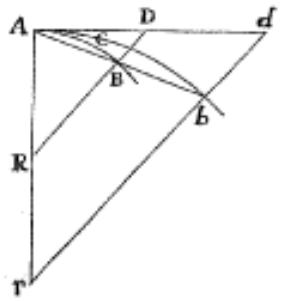
Cor. : D'où il suit que si deux quantités d'un genre quelconque sont partagées dans un même nombre de parties quelconques et que ces parties, lorsque leur nombre augmente et que leur grandeur diminue à l'infini soient entre elles en raison donnée la première à la première, la seconde à la seconde et ainsi de suite, les touts seront entre eux dans cette même raison donnée, car si on représente les parties de ces touts par les parallélogrammes des figures de ce lemme, les sommes de ces parties seront comme les sommes des parallélogrammes et, par conséquent, lorsque le nombre de ces parties et des parallélogrammes augmente et que leur grandeur diminue à l'infini, les touts seront dans la dernière raison d'un parallélogramme à l'autre, c'est-à-dire, par l'hypothèse, dans la dernière raison d'une partie à l'autre.

LEMME V

Tous les côtés homologues des figures semblables sont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes et leurs aires sont en raison doublées de ces côtés.

LEMME VI

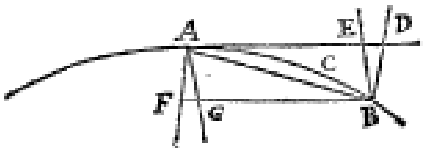
Si un arc de cercle quelconque ACB donné de position est soutenu par la corde AB et qu'au point A placé dans le milieu de sa courbure continue, il soit touché par une droite AD prolongée des deux côtés et que les points A et B s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident, l'angle BAD, compris sous la tangente et la corde diminuera à l'infini et s'évanouira à la fin.



Car si cet angle ne s'évanouissait pas, l'arc ACB et la tangente AD contiendraient un angle rectiligne et par conséquent la courbure au point A ne serait point continue, ce qui est contre l'hypothèse.

LEMME VII

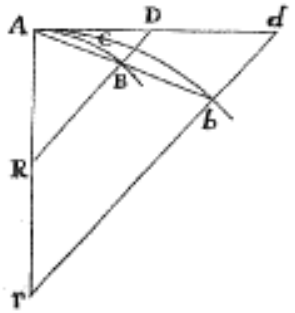
Les mêmes choses étant posées, la dernière raison qu'ont entre elles l'arc, la corde et la tangente est la raison d'égalité.



Car, pendant que le point B s'approche du point A, supposons que les lignes AB, AD soient prolongées jusqu'aux points éloignés b et d et qu'on mène la ligne bd parallèle à la sécante BD et qu'on prenne de plus Acb toujours semblable à l'arc ACB. Lorsque les points A et B coïncideront, l'angle dAb s'évanouira par le lemme précédent, donc les droites Ab, Ad qui restent toujours de grandeur finie et l'arc intermédiaire Acb coïncideront et seront, par conséquent égales. Donc, les droites AB, Ad et l'arc intermédiaire ACB qui leur sont toujours proportionnels s'évanouiront et auront pour dernière raison la raison d'égalité. C.Q.F.D.
Cor. 1 : Ainsi, si par B on mène une droite BF parallèle à la tangente AD, laquelle BF coupe toujours en F une ligne quelconque AF qui passe par A, la raison de cette droite BF à l'arc évanouissant ACB sera à la fin la raison d'égalité, puisqu'achevant le parallélogramme $AFBD$, cette raison est la même que celle qu'à la droite AD avec le même arc ACB.
Cor. 2 : Et si par B et par A on tire plusieurs droites BE, BD, AF, AG qui coupent la tangente AD et sa parallèle BF, la dernière raison de l'arc AB de la corde et de toutes les parties coupées AD, AE, BF, BG entre elles sera la raison d'égalité.
Cor. 3 : Et par conséquent toutes ces lignes pourront être prises l'une pour l'autre dans tous les cas où l'on se servira de la méthode des premières et dernières raisons.

LEMME VIII

Si les droites données** AR, BR, **l'arc** ACB, **la corde** AB **et la tangente** AD **forment trois triangles** RAB, $RACB$, RAD **et que les points** A **et** B **s'approchent l'un de l'autre, ces triangles qui s'évanouiront seront à la fin semblables et leur dernière raison sera la raison d'égalité.

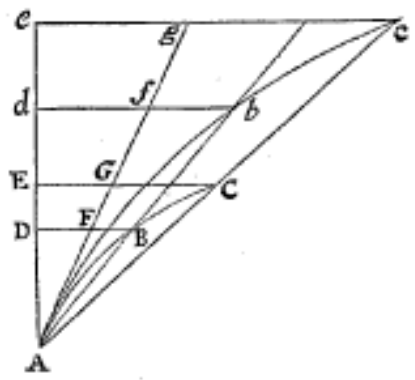


Pendant que B s'approche de A, imaginons qu'on prolonge AB, AD, AR, en b, d, r, qu'on mène rbd parallèle à RD et qu'on prenne l'arc Acb toujours semblable à l'arc ACB, lorsque les points A et B coïncideront, l'angle bAd s'évanouira et les trois triangles rAb, $rAcb$, rAd qui restent toujours de grandeur finie coïncideront et seront par conséquent égaux et semblables. Donc les triangles RAB, $RACB$, RAD qui leur sont toujours semblables et proportionnels seront à la fin égaux et semblables entre eux. C.Q.F.D.
Cor. : Donc ces triangles pourront être pris l'un pour l'autre dans tous les cas où l'on emploiera la méthode des premières et dernières raisons.

LEMME IX

Soient données de position la droite** AE **et la courbe** ABC **qui se coupent sous un angle donné** A **et soient menées de cette droite sous un autre angle donné les ordonnées** BD, CE **qui rencontrent la courbe en** B **et en** C, **si on suppose ensuite que les points** B **et** C **s'approchent l'un et l'autre continuellement du point** A, **les aires des triangles** ABD, ACE **seront à la fin entre elles en raison doublée des côtés.

Pendant que les points B et C s'approchent du point A, imaginons toujours que la ligne AD soit prolongée à des points très éloignés d et e, et de telle sorte que Ad et Ae soient toujours proportionnelles à AD et à AE, de plus que les ordonnées db, ec, tirées parallèles aux ordonnées DB, EC rencontrent en b et c les lignes AB, AC prolongées, enfin, que Abc soit une courbe semblable à ABC et Ag, une droite qui touche les deux courbes en A et coupe les ordonnées DB, EC, db, ec, en F, G, f, g. Ceci posé, lorsque les points B et C coïncideront avec le point A, la longueur Ae restant la même, l'angle cAg s'évanouira, les aires curvilignes Abd, Ace coïncideront avec les aires rectilignes Afd, Age et par conséquent elles seront (par le Lemme 5) en raison doublée des côtés Ad, Ae ; mais les aires ABD, ACE sont



toujours proportionnelles à ces aires, et les côtés AD, AE à ces côtés. Donc les ABD, ACE sont à la fin en raison doublée des côtés AD, AE. C.Q.F.D.

LEMME X

Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps.

Que les lignes AD, AE représentent les temps et les ordonnées DB, EC les vitesses produites, les espaces décrits avec ces vitesses seront comme les aires ABD, ACE qui auraient été décrites par la fluxion de ces ordonnées, c'est-à-dire (par le Lemme 9) que ces espaces seront dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps AD, AE. C.Q.F.D.

Cor. 1 : De là, on tire aisément que lorsque des corps qui parcourraient dans des temps proportionnels des parties semblables de figures semblables sont sollicités par de nouvelles forces quelconques égales et appliquées de la même manière, les déviations causées par ces forces, c'est-à-dire les distances des points où les corps sont arrivés réellement aux points où ils seraient arrivés sans l'action de ces forces sont entre elles à peu près comme les carrés des temps dans lesquels ces déviations ont été produites.

Cor. 2 : Et les déviations causées par des forces proportionnelles et appliquées de même aux parties semblables de figures semblables sont en raison composées des forces et des carrés des temps.

Cor. 3 : Il en est de même des espaces quelconques que les corps pressés par des forces diverses décrivent. Ces espaces sont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les carrés des temps.

Cor. 4 : Donc, dans le commencement du mouvement, les forces sont comme les espaces décrits directement et inversement comme les carrés des temps.

Cor. 5 : Et les carrés des temps sont comme les espaces décrits directement et inversement comme les forces.

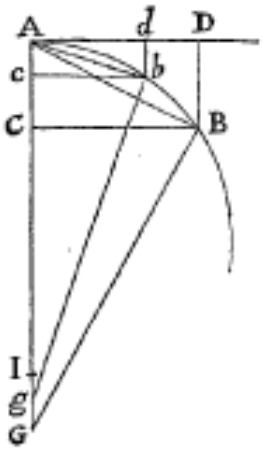
SCHOLIE

Lorsqu'on compare des quantités indéterminées de différent genre et qu'on dit que l'une d'elles est en raison directe ou inverse d'une autre, on entend par là que la première augmente ou diminue dans la même raison que la dernière, ou dans la raison inverse et lorsqu'on dit qu'une quantité est directement ou inversement, comme plusieurs de ces quantités, cela signifie qu'elle augmente ou diminue en raison composée des raisons dans lesquelles ces autres quantités augmentent ou diminuent, ou dans la raison composée des raisons renversées de ces raisons. Si on dit, par exemple, que A est directement comme B et comme C, et inversement comme D, cela veut dire que A augmentera ou diminuera en même raison que B x C x $\frac{1}{D}$ ou que les quantités A et $\frac{BC}{D}$ sont entre elles en raison donnée.

LEMME XI

Dans toutes les courbes qui ont une courbure finie au point de contact, la sous-tendante évanouissante d'un angle de contact est à la fin en raison doublée de la sous-tendante de l'arc qu'elle termine.

Cas 1 : Soient AbB cet arc, AD sa tangente, BD la sous-tendante de l'angle de contact, laquelle est perpendiculaire à la tangente et AB la sous-tendante de l'arc. Soient ensuite AG et BG perpendiculaires à AD et à AB et soit G la rencontre de ces perpendiculaires. Cela posé, imaginons que les points D, B, G, deviennent les points d, b, g, et que le point I soit la dernière intersection des lignes AG, BG, lorsque les points B et D sont arrivés en A ; il est clair que la distance GI peut être moindre qu'aucune distance assignable, mais parce qu'on peut faire passer des cercles par les points A, B, G, et par les points A, b, g, on a $AB^2 = AG$ x BD et



$Ab^2 = Ag$ x bd ; donc AB^2 est à Ab^2 en raison composée des raisons de AG, à Ag et de BD à bd. Mais comme on peut supposer la distance GI plus petite qu'aucune longueur assignable, la différence entre la raison de AG à Ag et la raison d'égalité peut être moindre qu'aucune différence assignable ; donc la différence de la raison

de AB^2 à Ab^2 à la raison de BD à bd, peut être moindre que toute différence assignable. Donc (par le Lemme I) la dernière raison de AB^2 à Ab^2 sera la même que la dernière raison de BD à bd. C.Q.F.D.
Cas 2 : Supposé que BD soit incliné sur AD, selon un angle quelconque donné, la dernière raison de BD à bd restera toujours la même et sera par conséquent la même que la raison de AB^2 à Ab^2. C.Q.F.D.
Cas 3 : Quand même l'angle D ne serait point donné et que la droite BD convergerait vers un point donné, ou qu'elle serait tirée suivant une loi quelconque, les angles D et d, formés selon la même loi, tendraient toujours à devenir égaux et à la fin leur différence deviendrait moindre que toute différence donnée, c'est-à-dire, (par le Lemme I) qu'ils seraient égaux à la fin et par conséquent les lignes BD, bd seraient entre elles dans la même raison qu'auparavant. C.Q.F.D.
Cor. 1 : Comme les tangentes AD, Ad, les arcs AB, Ab, et leurs sinus BC, bc deviennent à la fin égaux aux cordes AB, Ab, leurs carrés sont aussi à la fin comme les sous-tendantes BD, bd.
Cor. 2 : Et ces carrés seront aussi entre eux à la fin comme les flèches des arcs, lesquelles coupent les cordes en deux parties égales et convergent vers un point donné, car ces flèches sont comme les sous-tendantes BD, bd.
Cor. 3 : Donc, lorsqu'un corps avec une vitesse donnée décrit un arc, la flèche de cet arc est en raison doublée du temps pendant lequel il est décrit.
Cor. 4 : Les triangles rectilignes ADB, Adb sont à la fin en raison triplée des côtés AB, Ad et en raison « sesquiplée » des côtés DB, db, puisqu'ils sont en raison composée des côtés AD, DB et Ad, db, de même les triangles ABC, Abc, sont à la fin en raison triplée des côtés BC, bc. J'appelle raison « sesquiplée » la raison sous-doublée de la raison triplée, parce qu'elle est composée de la raison simple et de la raison sous doublée.
Cor. 5 : Comme DB, db deviennent à la fin parallèles et en raison doublée de AD et de Ad, les dernières aires curvilignes ADB, Adb seront (par la nature de la parabole), les deux tiers des triangles rectilignes ABD, Abd, et les segments AB, Ab, les tiers de ces mêmes triangles et de là ces aires et ces segments seront en raison triplée, tant des tangentes AD, Ad, que des cordes et des arc AB, Ab.

SCHOLIE

Au reste, dans toutes ces démonstrations nous supposons que l'angle de contact n'est ni infiniment plus grand que les angles de contact contenus entre la tangente et la corde des cercles, ni infiniment plus petit que ces mêmes angles, c'est-à-dire que nous supposons que la courbure au point A n'est ni infiniment petite, ni infiniment grande, mais que le rayon osculateur AI, est d'une grandeur finie, car si on prenait DB proportionnelle à AD^3, aucun cercle ne pourrait passer par le point A entre la tangente AD et la courbe AB, et en ce cas l'angle de contact serait infiniment plus petit que les angles de contact circulaires et par le même raisonnement, si on fait successivement DB proportionnel à AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, etc., on aura une série infinie d'angles de contact, dont chacun sera infiniment plus petit que celui qui le précède et si l'on fait successivement BD proportionnelle à

AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, etc., on aura une autre suite infinie d'angles de contact, dont le premier sera du même genre que les angles de contact circulaires, le second sera infiniment plus grand, le troisième infiniment plus grand que le second et ainsi de suite. De plus, entre deux quelconque de ces angles on peut insérer une suite d'angles intermédiaire, laquelle sera infinie des deux côtés et telle que chacun des angles qui la composeront sera infiniment plus grand, ou infiniment plus petit que celui qui le précède. Entre les termes AD^2 et AD^3, par exemple, on peut insérer la série $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, etc. Enfin, on pourra encore insérer entre deux angles quelconques de cette dernière série une nouvelle série d'angles intermédiaires toujours infiniment plus grands les uns que les autres, car la nature ne connaît point de bornes.

Ce qu'on a démontré des lignes courbes et des superficies qu'elles renferment peut s'appliquer facilement aux surfaces courbes des solides et aux solides mêmes. J'ai commencé par ces lemmes pour éviter de déduire de longues démonstrations ad absurdum, selon la méthode des anciens géomètres.

J'aurais eu des démonstrations plus courtes par la méthode des indivisibles, mais parce que l'hypothèse des indivisibles me paraît trop dure à admettre et que cette méthode est par conséquent peu géométrique, j'ai mieux aimé employer celle des premières et dernières raisons des quantités qui naissent et s'évanouissent et j'ai commencé par faire voir, le plus brièvement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités lorsqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode toute ce qu'on démontre par celle des indivisibles, mais en ayant prouvé le principe, je m'en servirai avec plus de sécurité.

Ainsi, lorsque dans la suite je considèrerai des quantités comme composées de particules déterminées et que je prendrai pour des lignes droites de petites portions de courbes, je ne désignerai point par là des quantités indivisibles, mais des quantités divisibles évanouissantes, de même, ce que je dirai des sommes et des raisons, doit toujours s'entendre non des particules déterminées, mais des limites des sommes et des raisons des particules évanouissantes ; et, pour sentir la force de mes démonstrations, il faudra toujours se rappeler la méthode que j'ai suivie dans les lemmes précédents.

On peut dire, contre ce principe des premières et dernières raisons, que les quantités qui s'évanouissent n'ont point de dernière proportion entre elles, parce qu'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'est pas la dernière et que lorsqu'elles sont évanouies, elles n'en ont plus aucune. Mais on pourrait soutenir, par le même raisonnement, qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où son mouvement s'éteint n'a point de dernière vitesse, car, dirait-on, avant que ce corps soit parvenu à ce lieu, il n'a pas encore sa dernière vitesse et quand il l'a atteint, il n'en a aucune, puisque alors son mouvement est éteint. Or, la réponse à cet argument est facile ; on doit entendre par la dernière vitesse de ce corps celle avec laquelle il se meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où son mouvement cesse, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'instant même qu'il atteint ce dernier lieu et avec laquelle son mouvement cesse. Il en est de même de la dernière raison des quantités évanouissantes, il faut

entendre par cette raison celles qu'ont entre elles des quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles sont évanouies, mais celle qu'elles ont dans le moment même qu'elles s'évanouissent. De la même manière, la première raison des quantités naissantes est celle que les quantités qui augmentent ont au moment qu'elles naissent, et la première ou dernière somme de ces quantités est celle qui répond au commencement ou à la fin de leur existence, c'est-à-dire, au moment qu'elles commencent à augmenter ou qu'elles cessent de diminuer.
Il y a une certaine borne que la vitesse d'un corps peut atteindre à la fin de son mouvement et qu'elle ne saurait passer, c'est cette vitesse qui est la dernière vitesse du corps. Il en est de même des limites et des proportions de toutes les quantités qui commencent et cessent. Comme cette limite est certaine et définie, c'est un problème très géométrique que de la déterminer, car on peut regarder comme géométriques tous les problèmes où il s'agit de déterminer avec précision quelque quantité.
On objectera peut-être que si les dernières raisons qu'ont entre elles les quantités qui s'évanouissent sont données, les dernières grandeurs de ces quantités seront aussi données et qu'ainsi toute quantité sera composée d'indivisibles, au contraire de ce qu'Euclide a démontré des incommensurables dans le dixième livre de ses éléments. Mais cette objection porte sur une supposition fausse, car les dernières raisons qu'ont entre elles les quantités qui s'évanouissent ne sont pas en effet les raisons des dernières quantités ou de quantités déterminées et indivisibles, mais les limites dont les raisons des quantités qui décroissent à l'infini approchent sans cesse, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais passer et qu'elles ne sauraient atteindre, si ce n'est dans l'infini.
On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence est donnée, augmentent à l'infini, leur dernière raison sera donnée et sera certainement la raison d'égalité ; cependant les dernières, ou les plus grandes quantités auxquelles répond cette raison, ne seront point des quantités données. Donc, lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de quantités évanouissantes, de quantités dernières, de quantités très petites, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

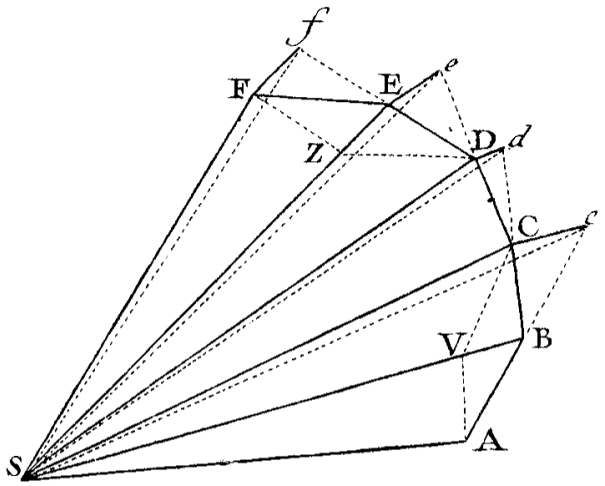
DEUXIÈME SECTION

De la recherche des forces centripètes.

PROPOSITION I. THÉORÈME I

Dans les mouvements curvilignes des corps, les aires décrites autour d'un centre immobile sont dans un même plan immobile et sont proportionnelles aux temps.

Supposé que le temps soit divisé en parties égales et que dans la première partie de ce temps le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB : suivant la première loi du mouvement dans un second temps égal au premier, il décrirait, si rien ne l'en empêchait, la droite $BC = AB$; donc en tirant au centre S, les rayons AS, BS, cS, les aires ASB, BSc seraient égales. Supposé que lorsque ce corps est arrivé en B, la force centripète agisse sur lui par un seul coup, mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite Bc et à suivre la droite BC. Si on tire la ligne Cc parallèle à BS, laquelle rencontre BC en C, à la fin de ce second temps, le corps (selon le premier corollaire des lois) sera en C dans le même plan que le triangle ASB. En tirant ensuite la ligne SC, le triangle SBC



sera égal au triangle SBc, à cause des parallèles SB, Cc, donc il sera aussi égal au triangle SAB.
De même, si la force centripète agit successivement sur le corps en C, D, E, etc. et qu'elle lui fasse décrire à chaque petite portion de temps les droites CD, DE, EF, etc. ces lignes seront toutes dans le même plan, et le triangle SCD sera égal au triangle SBC, le triangle SDE au triangle SCD et le triangle SEF au triangle SDE. Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile : et en composant les sommes des aires quelconques $SADS$, $SAFS$ seront entre elles comme les temps employés à les décrire.
Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente et que leur largeur diminue à l'infini, il est clair (par le corollaire 4 du Lemme III) que leur dernier périmètre ADF sera une ligne courbe. Donc la force centripète qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe agit sans interruption et les aires quelconques $SADS$, $SAFS$, qui étaient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur seront encore proportionnelles dans ce cas. C.Q.F.D.
Cor. 1 : La vitesse d'un corps attiré vers un centre immobile dans un espace non résistant est réciproquement comme le perpendiculaire tirée de ce centre à la ligne qui touche la courbe au lieu où le corps se trouve, car la vitesse de ce corps aux lieux A, B, C, D, E, est proportionnelle aux bases AB, BC, CD, DE, EF des

triangles égaux, et ces bases sont entre elles en raison réciproque des perpendiculaires qui leur sont abaissées du centre.
Cor. 2 : Si on fait un parallélogramme $ABCV$ sur les cordes AB, BC, de deux arcs successivement parcourus par le même corps en des temps égaux dans des espaces non résistants et que la diagonale BV de ce parallélogramme ait la même position que celle qu'elle a à la fin, lorsque ces arcs diminuent l'infini, cette diagonale prolongée passera par le centre des forces.
Cor. 3 : Si on fait les parallélogrammes $ABCV$, $DEFZ$, sur les cordes AB, BC et DE, EF des arcs décrits en temps égaux dans des espaces non résistants, les forces en B et en E seront entre elles dans la dernière raison des diagonales BV, EZ, lorsque ces arcs diminueront à l'infini ; car les mouvements du corps, suivant les lignes BC et EF, sont composés (par le Cor. 1. des lois) des mouvements suivant les lignes Bc, BV et Ef, EZ : or, BV et EZ, qui sont égales à Cc et à Ff ont été parcourues par les impulsions de la force centripète en B et en E, selon ce qui a été démontré dans cette proposition ; donc elles sont proportionnelles à ces impulsions.
Cor. 4 : Les forces par lesquelles les corps qui se meuvent dans des espaces libres sont détournés du mouvement rectiligne et contraints à décrire des courbes sont entre elles comme les flèches des arcs évanouissants parcourus en temps égaux et ces flèches convergent vers le centre des forces et coupent les cordes des arcs évanouissants en deux parties égales ; car ces flèches sont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le corollaire 3.
Cor. 5 : Ainsi ces mêmes forces sont à la force de la gravité, comme les flèches des arcs décrits sont aux flèches verticales des arcs paraboliques que les projectiles décrivent dans le même temps.
Cor. 6 : Tout ce qui a été démontré jusqu'ici sera encore vrai, par le corollaire 5 des lois, lorsque les plans dans lesquels les corps se meuvent et les centres des forces placés dans ces plans, au lieu d'être en repos, se mouvront uniformément en ligne droite.

PROPOSITION II. THÉORÈME II

La force centripète d'un corps qui se meut dans une ligne courbe décrite sur un plan et qui parcourt autour d'un point immobile, ou mû uniformément en ligne droite, des aires proportionnelles au temps, tend nécessairement à ce point.

Cas 1 : Tout corps qui se meut dans une courbe est détourné du mouvement rectiligne par une force qui agit sur lui, par la première loi, et cette force qui contraint le corps à se détourner de la ligne droite et à décrire en temps égaux les petits triangles égaux SAB, SBC, SCD, etc. autour du point immobile S, agit au lieu B suivant une ligne parallèle à cC, par la seconde loi, c'est-à-dire, suivant la ligne BS, et au lieu C suivant une ligne parallèle à dD, c'est-à-dire suivant la ligne SC, etc. Elle agit donc toujours selon des lignes qui tendent à ce point immobile S. C.Q.F.D.

Cas 2 : Et par le corollaire 5 des lois, le mouvement du corps est le même, soit que la superficie dans laquelle s'exécute ce mouvement soit en repos, soit qu'elle se meuve uniformément en ligne droite en emportant avec elle le centre, la courbe décrite et le corps décrivant.
Cor. 1 : Dans les espaces ou milieux non résistants, si les aires ne sont pas proportionnelles au temps, les forces centripètes ne tendent pas au concours des rayons, mais elles déclinent vers le côté vers lequel le corps se meut si la description des aires est accélérée, et elles déclinent vers le côté opposé si elle est retardée.
Cor. 2 : Dans les milieux résistants, si la description des aires est accélérée, les directions des forces déclinent aussi vers le côté vers lequel le mouvement du corps est dirigé.

SCHOLIE

Le corps peut être animé par une force centripète composée de plusieurs forces. Dans ce cas, le sens de la proposition précédente est que la force qui résulte de toutes les autres tend au point S. De plus, si quelqu'autre force agit continuellement selon une ligne perpendiculaire à la superficie décrite, le corps se détournera du plan de son mouvement, mais la quantité de la superficie décrite n'augmentera ni ne diminuera, ainsi on peut la négliger dans la composition des forces.

PROPOSITION III. THÉORÈME III

Si un corps décrit autour d'un autre corps qui se meut d'une façon quelconque des aires proportionnelles au temps, la force qui anime le premier est composée d'une force qui tend vers le second et de toute la force accélératrice par laquelle ce second corps est animé.

Soit le premier corps L et le second T : Si une force nouvelle égale et contraire à celle qui agit sur le corps T agit sur ces deux corps selon des lignes parallèles, le premier corps L continuera, par le Cor. 6. des lois, à décrire autour du corps T les mêmes aires qu'auparavant ; mais la force qui agissait sur le corps T sera détruite par cette nouvelle force qu'on a supposé lui être égale et contraire. Donc, par la première loi, ce corps T abandonné à lui-même demeurera en repos, ou se mouvra uniformément en ligne droite et le corps L, qui est animé alors par la différence de ces forces, c'est-à-dire par la force restante, continuera à décrire des aires proportionnelles au temps autour du corps T. Donc par le théorème 2 la différence de ces forces tend vers le corps T comme à son centre. C.Q.F.D.
Cor. 1 : Il en résulte que si un corps L décrit autour d'un autre corps des aires proportionnelles au temps et que de la force totale qui presse le corps L soit simple, soit composée de plusieurs forces, selon le corollaire 2 des lois, on soustrait toute la force accélératrice qui agit sur l'autre corps ; la force restante par laquelle le corps L est animé tendra tout entière vers l'autre corps T comme centre.
Cor. 2 : Et si ces aires ne s'éloignent pas beaucoup d'être proportionnelles au temps, la force restante sera à peu près dirigée vers le corps T.

Cor. 3 : Et réciproquement, si la force restante tend à peu près vers le corps T, les aires seront à peu près proportionnelles au temps.
Cor. 4 : Si le corps L décrit autour du corps T des aires qui s'éloignent beaucoup de la proportionnalité des temps et que ce corps T soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite, la force centripète qui tend vers ce corps est nulle, ou bien elle est mêlée et composée avec d'autres forces très puissantes et la force totale, composée de toutes ces forces s'il y en a plusieurs, sera dirigée vers un autre centre mobile ou immobile. Il en est de même lorsque le corps T se meut d'un mouvement quelconque, pourvu que l'on prenne pour force centripète celle qui reste après qu'on ait soustrait la force totale qui agit sur le corps T.

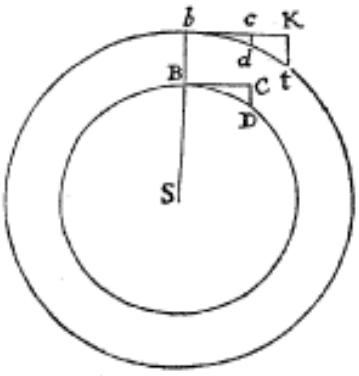
SCHOLIE

Comme la description des aires égales en temps égaux marque que le corps qui décrit ces aires éprouve l'action d'une force qui agit sur lui qui le retire du mouvement rectiligne et qui le retient dans son orbite, pourquoi ne prendrions-nous pas, dans la suite, cette description égale des aires pour l'indice d'un centre autour duquel se fait tout mouvement circulaire dans des espaces non résistants ?

PROPOSITION IV. THÉORÈME IV

Les corps qui parcourent uniformément différents cercles sont animés par des forces centripètes qui tendent au centre de ces cercles et qui sont entre elles comme les carrés des arcs décrits en temps égal, divisés par les rayons de ces cercles.

Ces forces tendent au centre des cercles par la proposition II et le corollaire 2 de la proposition I et elles sont entre elles, par le corollaire 4 de la proposition I comme les sinus verses des arcs décrits dans de très petits temps égaux, c'est-à-dire par le lemme VII comme les carrés de ces mêmes arcs divisés par les diamètres de leurs cercles. Or, comme ces petits arcs sont proportionnels aux arcs décrits dans des temps quelconques égaux et que les diamètres sont comme les rayons, les forces seront comme les carrés des arcs quelconques décrits dans des temps égaux divisés par les rayons. C.Q.F.D.



Cor. 1 : Comme ces arcs sont proportionnels aux vitesses des corps, les forces centripètes seront en raison composée de la raison doublée des vitesses directement et de la raison simple des rayons inversement.
Cor. 2 : Et comme les temps périodiques sont en raison composée de la raison directe des rayons et de la raison inverse des vitesses, les forces centripètes seront en raison composée de la raison directe des rayons et de la raison doublée inverse des temps périodiques.
Cor. 3 : Donc, si les temps périodiques sont égaux et que les vitesses soient par conséquent comme les rayons, les forces centripètes seront aussi comme les rayons : et au contraire.
Cor. 4 : Si les temps périodiques et les vitesses sont en raison sous doublée des rayons, les forces centripètes seront égales entre elles : et au contraire.
Cor. 5 : Si les temps périodiques sont comme les rayons et que par conséquent les vitesses soient égales, les forces centripètes seront en raison renversée des rayons : et au contraire.
Cor. 6 : Si les temps périodiques sont en raison sesquiplée des rayons et que par conséquent les vitesses soient réciproquement en raison sous doublée des rayons, les forces centripètes seront réciproquement comme les carrés des rayons : et au contraire.
Cor. 7 : Et généralement, si le temps périodique est comme une puissance quelconque R^n du rayon et que par conséquent la vitesse soit réciproquement comme la puissance R^{n-1} du rayon, la force centripète sera réciproquement comme la puissance R^{2n-1} du rayon : et au contraire.
Cor. 8 : On peut trouver de la même manière tout ce qui concerne les temps, les vitesses et les forces avec lesquelles les corps décrivent des parties semblables de figures quelconques semblables qui ont leurs centres posés de même dans ces figures ; il ne faut pas, pour ces cas, d'autres démonstrations que les précédentes, pourvu qu'on substitue la description égale des aires au mouvement uniforme et qu'on mette les distances des corps aux centres à la place des rayons.
Cor. 9 : Il suit aussi de la même démonstration, que l'arc qu'un corps décrit pendant un temps quelconque en tournant uniformément dans un cercle en vertu d'une force centripète donnée, est moyen proportionnel entre le diamètre de ce cercle et la ligne que le corps parcourrait en tombant par la même force donnée et pendant le même temps.

SCHOLIE

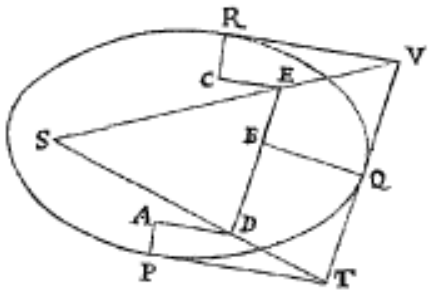
Le cas du corollaire 6 est celui des corps célestes, (comme nos compatriotes *Hook, Wren* et *Halley* l'ont chacun conclu des observations) c'est pourquoi j'expliquerai fort au long dans la suite de cet ouvrage tout ce qui a rapport à la force centripète qui décroît en raison doublée de distances au centre.
De plus, par la proposition précédente et par ses corollaires, on peut trouver la proportion qui est entre la force centripète et une force quelconque connue, telle que la gravité, car si le corps tourne dans un cercle concentrique à la terre par la force de la gravité, la gravité sera se force centripète : or, connaissant d'un côté la descente

des graves et de l'autre le temps de la révolution et l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura par le corollaire 9 de cette proposition la proportion cherchée entre la gravité et la force centripète. C'est par des propositions semblables que M. *Hugens*, dans son excellent Traité de *Horollogio oscillatorio*, a comparé la force de la gravité avec les forces centrifuges des corps qui circulent.
On pourrait encore démontrer cette proposition de cette manière. Soit supposé un polygone d'un nombre de côtés quelconques inscrit dans un cercle. Si le corps, en parcourant les côtés de ce polygone avec une vitesse donnée est réfléchi par le cercle à chacun des angles de ce polygone, la force avec laquelle ce corps frappe le cercle à chaque réflexion sera comme sa vitesse : donc la somme des forces en un temps donné sera comme cette vitesse multipliée par le nombre des réflexions, c'est-à-dire, (si le polygone est donné d'espèce) comme la ligne parcourue dans ce temps, laquelle doit être augmentée ou diminuée dans la raison qu'elle a elle-même au rayon de ce cercle, c'est-à-dire, comme le carré de cette ligne divisé par le rayon, ainsi si les côtés du polygone diminuant à l'infini, le polygone vient à coïncider enfin avec le cercle, la somme des forces sera alors comme le carré de l'arc parcouru dans un temps donné divisé par le rayon. C'est là la mesure de la force centrifuge avec laquelle le corps presse le cercle, et cette force est égale et contraire à la force par laquelle ce cercle repousse continuellement le corps vers le centre.

PROPOSITION V. PROBLÈME I

Trouver le point auquel tendent comme centre des forces qui font parcourir une courbe donnée, lors qu'on connaît la vitesse du corps à chaque point de cette courbe.

Que les lignes PT, TQV, VR, qui se rencontrent aux points T et V, touchent la courbe donnée dans les points P, Q, R, que l'on mène ensuite par ces points et perpendiculairement aux tangentes les droites PA, QB, RC, réciproquement proportionnelles aux vitesses dans les mêmes points, c'est-à-dire, de sorte que PA soit à QB comme la vitesse au point Q est à la vitesse au point P, et que QB soit à RC comme la vitesse au point R à la vitesse au point Q. Cela fait, soient menées à angles droits par les extrémités A, B, C, de ces perpendiculaires les lignes AD, DBE, EC, qui se rencontrent en D et en E, et en tirant les lignes TD, VE, elles se rencontreront au centre cherché S.

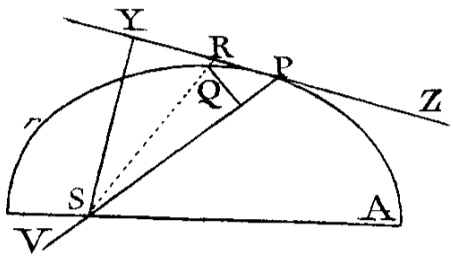


Car les perpendiculaires tirées du centre S aux tangentes PT, QT sont (par le corollaire 1 de la proposition I) réciproquement comme les vitesses du corps aux points P et Q ; donc par la construction elles seront comme les perpendiculaires AP, BQ directement, c'est-à-dire, comme les perpendiculaires abaissées du point D sur ces tangentes. D'où l'on tire facilement que les points S, T, D sont dans une même ligne droite. On prouvera, par le même raisonnement, que les points S, E, V sont aussi dans une même ligne droite ; donc le centre S se trouvera dans l'intersection des lignes TD, VE. C.Q.F.D.

PROPOSITION VI. THÉORÈME V

Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un espace non résistant et qu'on suppose que la flèche de l'arc naissant que ce corps parcourt dans un temps infiniment petit et qui partage sa corde en deux parties égale passe, étant prolongée par le centre des forces, la force centripète dans le milieu de l'arc sera en raison directe de cette flèche et en raison doublée inverse du temps.

Par le corollaire 4 de la proposition I la flèche, dans un temps donné, est comme la force, donc, en augmentant le temps en une raison quelconque, la flèche (par les corollaires 2 et 3 du lemme XI) augmentera dans la raison doublée du temps et soustrayant de part et d'autre la raison doublée du temps, la force sera en raison directe de la flèche et en raison doublée inverse du temps. C.Q.F.D.
On pourrait aussi démontrer facilement cette proposition par le cor. 4 du lemme X.



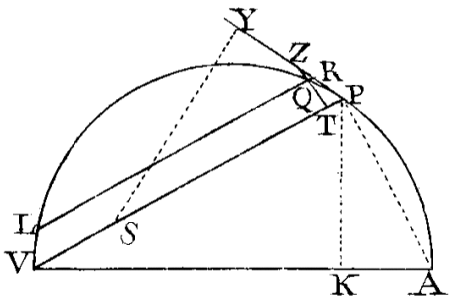
Cor. 1 : Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ, et que cette courbe soit touchée par la ligne ZPR en un point quelconque P, que d'un autre point quelconque Q de cette courbe on tire QR parallèle à SP et qu'on abaisse QT perpendiculaire sur SP, la force centripète sera réciproquement comme la quantité que devient $\dfrac{SP^2 \text{ x } QT^2}{QR}$ lorsque les points P et Q coïncident ; car QR est égale à la flèche de l'arc double de QP, dont le milieu est P, et le double du triangle SQP ou SP x QT est proportionnel au temps dans lequel cet arc double est décrit ; ainsi on peut l'écrire à la place de ce temps.
Cor. 2 : On prouvera, par le même raisonnement que la force centripète est

réciproquement comme la quantité $\dfrac{SY^2 \text{ x } QP^2}{QR}$ pourvu que SY soit abaissée perpendiculairement du centre des forces sur la tangente PR de l'orbite, car les rectangles SY x QP et SP x QT sont égaux.
Cor. 3 : Si l'orbe PQ est un cercle dont la droite PV qui passe par le corps et par le centre des forces soit une corde, ou que cet orbe PQ ait pour cercle osculateur le cercle dont la corde est PV, la force centripète sera réciproquement comme la quantité SY^2 x PV, car dans cette supposition $PV = \dfrac{QP^2}{QR}$.
Cor. 4 : Les mêmes choses étant posées, la force centripète est dans la raison doublée directe de la vitesse et dans la raison inverse de la corde PV, car par le corollaire 1 de la proposition I la vitesse est réciproquement comme la perpendiculaire SY.
Cor. 5 : Donc, si on a une figure curviligne quelconque APQ, et dans cette figure un point donné S vers lequel la force centripète soit perpétuellement dirigée, on pourra trouver la loi de la force centripète, par laquelle un corps quelconque P sera retiré à tout moment du mouvement rectiligne et retenu dans le périmètre de cette figure, en cherchant la valeur du solide $\dfrac{SP^2 \text{ x } QT^2}{QR}$, ou celle du solide SY^2 x PV, qui sont réciproquement proportionnels à cette force. Nous en donnerons des exemples dans les problèmes suivants.

PROPOSITION VII. PROBLÈME II

Trouver la loi de la force centripète qui tend à un point donné et qui fait décrire à un corps la circonférence d'un cercle.

Soient $VQPA$ la circonférence du cercle, S le point donné vers lequel la force fait tendre le corps comme à son centre, P un lieu quelconque où l'on suppose le corps arrivé, Q le lieu consécutif, PRZ la tangente du cercle au point P, et PV la corde qui passe par S. Soient de plus VA le diamètre qui passe par V, AP la corde tirée de A à P, QT une perpendiculaire à PV, laquelle étant prolongée rencontre la tangente PR en Z, RL la parallèle à PV qui passe par Q et qui rencontre le cercle en L et la tangente PZ en R.

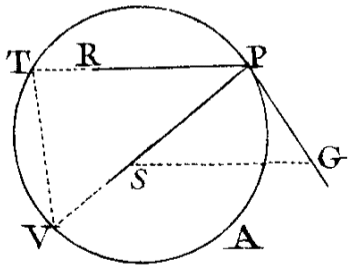


Cela posé, à cause des triangles semblables ZQR, ZTP, VPA, on aura RP^2,

c'est-à-dire QR x $RL : QT^2 : \ : AV^2 : PV^2$ donc $\dfrac{QR \text{ x } RL \text{ x } PV^2}{AV^2} = QT^2$, multipliant présentement cette équation par $\dfrac{SP^2}{QR}$, et écrivant PV au lieu de RL, ce qui est permis lorsque les points P et Q coïncident, on aura $\dfrac{SP^2 \text{ x } PV^3}{AV^2} = \dfrac{SP^2 \text{ x } QT^2}{QR}$ donc, par les corollaires 1 et 5 de la proposition VI, la force centripète sera réciproquement comme $\dfrac{SP^2 \text{ x } PV^3}{AV^2}$ c'est-à-dire, à cause que AV^2 est donné, réciproquement comme le carré de la distance ou hauteur SP multipliée par le cube de la corde PV. C.Q.F.T.

AUTRE SOLUTION

Soit menée la perpendiculaire SY sur la tangente PR prolongée, à cause des triangles semblables SYP, VPA, on aura $AV : PV : \ : SP : SY$. Donc $\dfrac{SP \text{ x } PV}{AV} = SY$, et $\dfrac{SP^2 \text{ x } PV^3}{AV^2} = SY^2$ x PV. Donc, par les corollaires 3 et 5 de la proposition VI, la force centripète est réciproquement comme $\dfrac{SP^2 \text{ x } PV^3}{AV^2}$, c'est-à-dire, à cause que AV est donnée, réciproquement comme SP^2 x PV^3. C.Q.F.T.



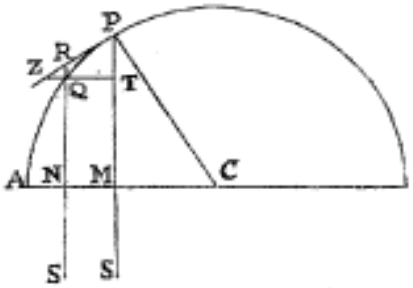
Cor. 1 : Donc, si le point donné S, auquel la force centripète tend sans cesse, se trouve dans la circonférence de ce cercle, comme en V, la force centripète sera réciproquement comme la cinquième puissance de la hauteur SP.
Cor. 2 : La force par laquelle le corps P décrit le cercle $APTV$ autour du centre S des forces, est à la force par laquelle ce même corps P peut tourner dans le même temps périodique et dans le même cercle autour d'un autre centre quelconque de forces R, comme SP x RP^2 à SG^3, SG étant une droite menée parallèlement à RP et terminée par la tangente PG.
Car par la construction, la première force est à la dernière comme RP^2 x PT^3 à SP^2 x PV^3 c'est-à-dire, comme SP x PR^2 à $\dfrac{SP'^3 \text{ x } PV^3}{PT^3}$ ou bien, à cause des triangles semblables PSG, TPV, comme SP x RP^2 à SG^3.
Cor. 3 : La force par laquelle le corps P circule dans un orbe quelconque autour d'un centre de forces S est à la force par laquelle ce même corps P peut circuler

dans le même temps périodique et dans le même orbe autour d'un autre centre quelconque R de forces, comme SP x RP^2 à SG^3, c'est-à-dire, comme la distance du corps au premier centre des forces S, multipliée par le carré de la distance au second centre R, est au cube de la ligne SG tirée du premier centre S parallèlement à la distance du second centre et terminée par la tangente PG de l'orbite. Car les forces dans cet orbe sont les mêmes à un de ses points quelconques P, que dans le cercle qui a la même courbure.

PROPOSITION VIII. PROBLÈME III

On demande la loi de la force centripète dans le cas où le corps décrivant un demi-cercle PQA tend continuellement vers un point S si éloigné que toutes les lignes PS, RS tirées à ce point peuvent être regardées comme parallèles.

Par le centre C de ce demi-cercle, soit tiré le demi-diamètre CA coupé perpendiculairement en M et en N par les directions de la force centripète. Tirant CP, on aura, à cause des triangles semblables, CPM, PZT et RZQ, $CP^2 : PM^2 :: PR^2 : QT^2$, et par la nature du cercle $PR^2 = QR$ x $RN + QN =$ (les points Q et P coïncidant) QR x $2PM$. Donc $CP^2 : PM^2 :: QR$ x $2PM : QT^2$ donc $\dfrac{QT^2}{QR} = \dfrac{2PM^3}{CP^2}$ et $\dfrac{QT^2 \text{ x } SP^2}{QR} = \dfrac{2PM^3 \text{ x } SP^2}{CP^2}$, donc, par les Cor. 1 et 5 de la proposition VI, la force centripète est réciproquement comme $\dfrac{2PM^3 \text{ x } SP^2}{CP^2}$, c'est-à-dire (en négligeant la raison déterminée de $\dfrac{2SP^2}{CP^2}$) réciproquement comme PM^3. C.Q.F.T.



On tirerait facilement la même chose de la proposition précédente.

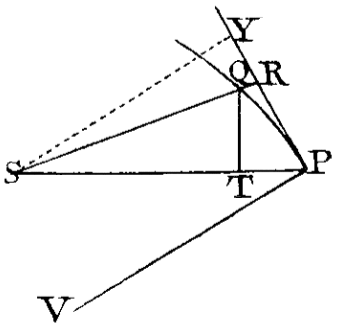
SCHOLIE

Par un raisonnement à peu près semblable, on trouverait que si le corps décrivait une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, en vertu d'une force centripète dirigée à un point très éloigné, cette force centripète serait encore réciproquement comme le cube de l'ordonnée qui tend à ce point.

PROPOSITION IX. PROBLÈME IV

Supposé que le corps tourne dans une spirale PQS qui coupe tous les rayons SP, SQ, etc., sous un angle donné, on demande la loi de la force centripète qui tend au centre de cette spirale.

Soit supposé constant l'angle indéfiniment petit PSQ, la figure $SPRQT$, ayant tous ses angles constants, sera donnée d'espèce, donc $\frac{QT}{QR}$ sera donnée aussi, donc $\frac{QT^2}{QR}$ sera comme SP, parce que, comme on vient de le dire, $SPRQT$ est donnée d'espèce.



Supposons à présent que l'angle PSQ change selon une loi quelconque, la droite QR qui sous-tend l'angle de contact QPR changera par le lemme XI en raison doublée de PR ou de QT. De là, il suit que la raison de $\frac{QT^2}{QR}$ demeurera la même qu'auparavant, c'est-à-dire qu'elle sera encore comme SP. C'est pourquoi $\frac{QT^2 \text{ x } SP^2}{QR}$ sera comme SP^3, donc par les corollaires 1 et 5 de la proposition VI la force centripète sera réciproquement proportionnelle au cube de la distance SP. C.Q.F.T.

AUTRE SOLUTION

La perpendiculaire SY abaissée sur la tangente et la corde PV du cercle osculateur étant en raison donnée avec SP, SP^3 est proportionnel à SY^2 x PV, c'est-à-dire, par les corollaires 3 et 5 de la proposition VI réciproquement proportionnel à la force centripète.

LEMME XII

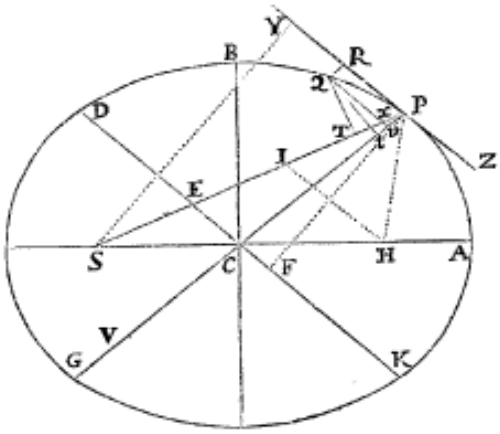
Tous les parallélogrammes décrits autour des diamètres quelconques conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole donnée sont égaux entre eux.

Cette proposition est claire par les coniques.

PROPOSITION X. PROBLÈME V

Un corps circulant dans une ellipse : on demande la loi de la force centripète qui tend au centre de cette ellipse.

Soient CA, CB les demi axes de l'ellipse ; GP, DK d'autres diamètres conjugués ; PF, QT, des perpendiculaires à ces diamètres ; Qv une ordonnée au diamètre GP ; si on achève le parallélogramme $QvPR$, on aura par les conique Pv x vG : Qv^2 : : PC^2 : CD^2. Mais à cause des triangles semblables QvT, PCF, Qv^2 : QT^2 : : PC^2 : PF^2. Donc, en composant ces raisons, on aura Pv x vG : QT^2 : : PC^2 : CD^2, et PC^2 : PF^2, ou vG : $\dfrac{QT^2}{PV}$: : PC^2 : $\dfrac{CD^2 \text{ x } PF^2}{PC^2}$.



Si on écrit a présent QR pour Pv, que l'on mette, à cause du lemme XII. BC x CA à la place de CD x PF, et que l'on suppose vG égale à $2PC$, ainsi qu'on le doit lorsque les points P et Q coïncident, on aura, en multipliant les extrêmes et les moyens, $\dfrac{QT^2 \text{ x } PC^2}{QR} = \dfrac{2BC^2 \text{ x } CA^2}{PC}$. Donc, par le corollaire 5 de la proposition VI la force centripète sera réciproquement comme $\dfrac{2BC^2 \text{ x } AC^2}{PC}$; c'est-à-dire, puisque $2CB^2$ x CA^2 est donnée, réciproquement comme $\dfrac{1}{PC}$ ou, ce qui revient au même, directement comme la distance PC. C.Q.F.T.

AUTRE SOLUTION

Sur la droite PG de l'autre côté du point T par rapport à P, soit pris le point u de sorte que $Tu = Tv$. Soit pris ensuite uV à vG, comme DC^2 à PC^2. Puisque les coniques donnent Qv^2 : Pv x vG : : DC^2 : PC^2, on aura $Qv^2 = Pv$ x uV, et ajoutant le rectangle uP x Pv de part et d'autre, il est clair que le carré de la corde de l'arc PQ sera égal au rectangle VPxPv ; donc le cercle qui touche la section conique en P et qui passe par le point Q passera aussi par le point V. Supposez à présent que les points P et Q se confondent, la raison de uV à vG, qui

est la même que la raison de DC^2 à PC^2, deviendra la raison de PV à PG ou de PV à $2PC$; donc $PV = \dfrac{2DC^2}{PC}$, donc, par le corollaire 3 de la proposition VI la force par laquelle le corps P fait sa révolution dans l'ellipse sera réciproquement comme $\dfrac{2DC^2}{PC}$ x PF^2 c'est-à-dire, puisque $2DC^2$ x PF^2 est donné, que cette force sera directement comme PC. C.Q.F.T.
Cor. 1 : La force est donc comme la distance du corps au centre de l'ellipse : et réciproquement, si la force est comme la distance, le corps décrira ou une ellipse dont le centre sera le même que le centre des forces, ou le cercle dans lequel l'ellipse peut se changer.
Cor. 2 : Les temps périodiques des révolutions qui se font autour du même centre sont égaux dans toutes les ellipses, car ces temps sont égaux dans les ellipses semblables (par les corollaires 3 et 8 de la proposition IV) ; mais dans les ellipses qui ont le grand axe commun, ils sont les uns aux autres directement comme les aires elliptiques totales et inversement comme les particules de ces aires décrites en temps égal, c'est-à-dire directement comme les petits axes et inversement comme les vitesses des corps dans les sommets principaux, ou directement comme les petits axes et inversement comme les ordonnées au même point de l'axe commun. Mais ces deux raisons directes et inverses qui composent la raison des temps sont alors égales, donc les temps sont égaux.

SCHOLIE

Si le centre de l'ellipse s'éloigne à l'infini et qu'elle devienne une parabole, le corps se mouvra dans cette parabole et la force tendant alors à un centre infiniment distant, elle deviendra uniforme. C'est le cas traité par *Galilée*. Si (en changeant l'inclinaison du plan au cône coupé) la parabole se change en une hyperbole, le corps se mouvra dans le périmètre de cette hyperbole, la force centripète se changeant alors en force centrifuge ; et de même que dans le cercle ou l'ellipse, si les forces tendent au centre de la figure placé sur l'abscisse, en augmentant ou diminuant les ordonnées en une raison donnée quelconque, ou en changeant l'angle d'inclinaison des ordonnées sur l'abscisse, ces forces augmenteront ou diminueront toujours en raison des distances au centre, pourvu que les temps périodiques demeurent égaux : ainsi dans toutes les courbes, si les ordonnées augmentent ou diminuent dans une raison donnée quelconque, ou que l'angle de ces ordonnées change d'une façon quelconque, le temps périodique et le centre des forces, qu'on suppose placé à volonté sur l'abscisse, demeurant les mêmes, les forces centripètes aux extrémités des ordonnées correspondantes seront entre elles comme les distances au centre.

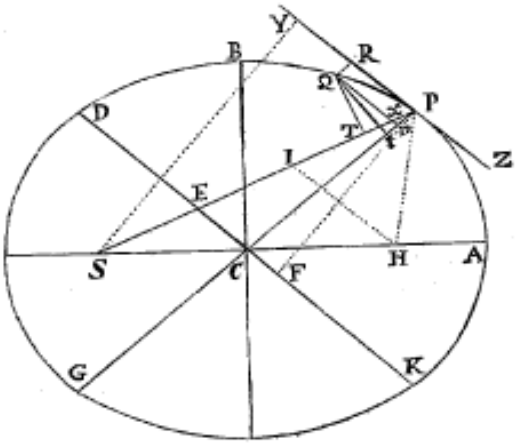
TROISIÈME SECTION

Du mouvement des corps dans les sections coniques excentriques.

PROPOSITION XI. PROBLÈME VI

Un corps faisant sa révolution dans une ellipse ; on demande la loi de la force centripète, lorsqu'elle tend à un de ses foyers.

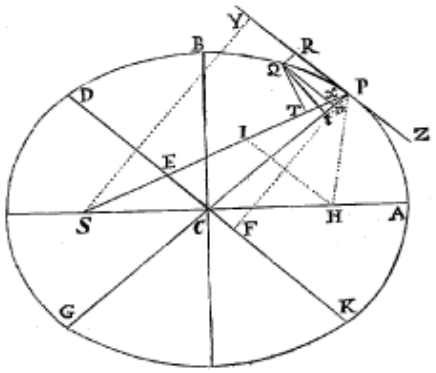
Soient S le foyer de l'ellipse, E la rencontre de SP avec le diamètre DK, x celle de la même ligne SP avec l'ordonnée QV, Q x PR le parallélogramme fait sur Px et Qx. On voit d'abord que EP est égale au demi grand axe AC ; car menant par l'autre foyer H la droite HI parallèle à DK, il est clair que EI sera égale à SE à cause de l'égalité qui est entre CH et CS et par conséquent PE sera égale à la moitié de la somme de PI et de PS, ou, ce qui revient au même, à AC, moitié de la somme de PS et de PH, puisqu'il suit de ce que HI est parallèle à RP, et de ce que les angles HPZ et IPR sont égaux, que $HP = PI$. Abaissant ensuite QT perpendiculaire à SP et nommant L le paramètre du grand axe, c'est-à-dire $\frac{2BC^2}{AC}$; on verra que L x QR : L x Pv : : QR : Pv, c'est-à-dire : : PE ou AC : PC ; mais L x Pv : Gv x vP : : L : Gv et Gv x vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2 ; de plus, Qv^2 : Qx^2 en raison d'égalité (corollaire 2 lemme VII) lorsque les points P et Q coïncident et Qx^2 ou Qv^2 : QT^2 : : EP^2 : PF^2,



c'est-à-dire : : CA^2 : PF^2 ou (lemme XII) : : CD^2 : CB^2 ; donc, en composant toutes ces raisons on aura L x QR ; QT^2 : : AC x L x PC^2 x CD^2 ou : : $2CB^2$ x PC^2 x CD^2 : PC x Gv x CD^2 x CB^2 ou : : $2PC$: Gv. Or, puisque $2PC$ et Gv sont égales lorsque les points P et Q coïncident, les quantités L x QR et QT^2 qui leur sont proportionnelles seront donc égales aussi. Multipliant à présent ces quantités égales par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura L x $SP^2 = \frac{SP^2 \text{ x } QT^2}{QR}$. Donc par les corollaires 1 et 5 de la proposition VI la force centripète sera réciproquement comme L x SP^2, c'est-à-dire en raison renversée de SP^2. C.Q.F.T.

AUTRE SOLUTION

Comme la force qui tend au centre de l'ellipse et par laquelle le corps P peut faire sa révolution dans cette courbe est par le corollaire 1 de la proposition X proportionnelle à la distance CP du corps au centre C de l'ellipse ; en menant CE parallèle à la tangente PR de l'ellipse, on verra par le corollaire 3 de la proposition VII que la force par laquelle ce même corps P ferait sa révolution autour d'un autre point quelconque S de l'ellipse, serait comme $\frac{PE^3}{SP^2}$ en supposant que E soit la rencontre de CE et de la droite SP, tirée au point S. Donc, lorsque le point S sera le foyer et que par conséquent PE sera constante, la force centripète sera comme $\frac{1}{SP^2}$. C.Q.F.T.



Dans ce problème, ainsi que dans le problème V, on pourrait se contenter d'appliquer la conclusion trouvée pour le cas de l'ellipse à celui de la parabole et de l'hyperbole ; mais à cause de l'importance de ce problème et de l'étendue de son usage dans les propositions suivantes, j'ai cru qu'il ne serait pas inutile de démontrer en particulier les cas de parabole et de l'hyperbole.

[...][2]

[2] *Marianne BEAUMONT, pour la traduction du françois en français moderne, la saisie, la relecture, la correction et la mise en forme.*